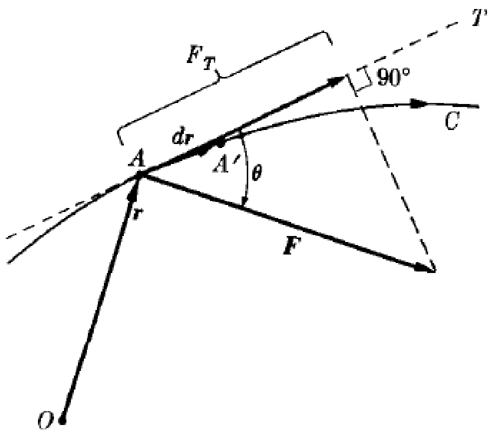
Tema 3 Trabajo y Energía

3.1. Trabajo, energía y potencia.

3.1.1. Energía y trabajo mecánico.

En Mecánica los conceptos de trabajo y energía son muy útiles para resolver problemas dinámicos en los que las fuerzas vienen dadas en función del desplazamiento. Cuando las fuerzas vienen dadas en función del tiempo es útil emplear las relaciones de impulso mecánico y cantidad de movimiento que vimos en el capítulo anterior.

La energía es una forma de almacenar trabajo (energía potencial) y también puede representar la forma en que se desarrolla en trabajo (energía cinética).



Consideremos una partícula A que se mueve a lo largo de una curva C bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$. En un tiempo muy corto dt la partícula se mueve de A hasta A' siendo el desplazamiento $\overrightarrow{AA'} = d\vec{r}$.

El trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ durante tal desplazamiento se define por el producto escalar:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad [1]$$

que podemos escribir como:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{r}\right| \cos\theta$$

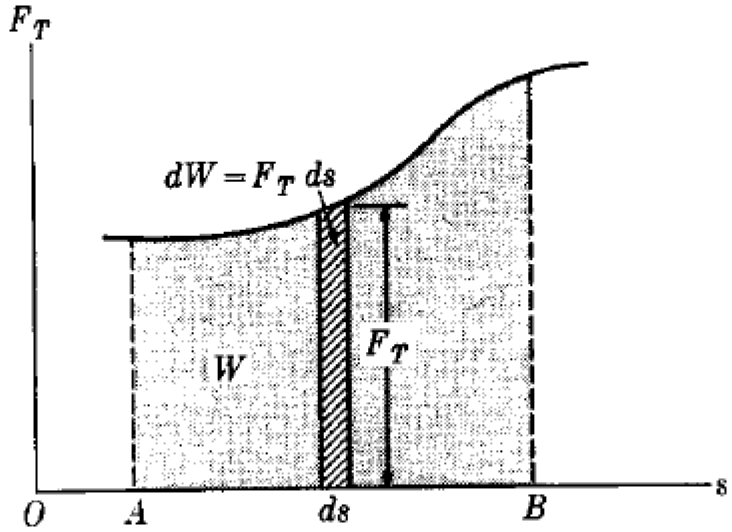
donde θ es el ángulo entre $\vec{F}$ y $d\vec{r}$. Si llamamos $ds = \left|d\vec{r}\right|$ y $F_t = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\theta$, resulta:

$$dW = F_t \cdot ds$$

es decir, el trabajo es igual al producto del desplazamiento por la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento.

Es importante destacar que la componente de la fuerza perpendicular al desplazamiento $\vec{F}\sin\theta$ no realiza trabajo.

El trabajo representa el área encerrada entre la curva F_t y el eje s, según corresponde a la definición de integral.



Para un desplazamiento desde un punto A hasta un punto B, el trabajo total es la suma de los trabajos infinitesimales:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz\right) \qquad [2]$$

Si sobre un a partícula actúan varias fuerzas $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$, entonces el trabajo durante un desplazamiento $d\vec{r}$ será:

$$dW = dW_1 + dW_2 + \ldots + dW_n = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \ldots + \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = \vec{R} \cdot d\vec{r} \qquad [3]$$

siendo $\vec{R}$ la resultante de las fuerzas.

Como hemos dicho, si $\vec{R}$ es perpendicular al desplazamiento no se realiza trabajo. Igualmente, sino se desarrolla desplazamiento no se realiza trabajo. En este sentido, conviene destacar lo que ocurre cuando por ejemplo sujetamos un peso son la mano y no nos movemos. Ya que no desarrollamos desplazamiento entonces no realizamos trabajo y sin embargo, nos cansamos. Esto se debe a que la fuerza que realizamos, aunque no provoque desplazamiento, debe mantener una energía potencial para vencer a la gravedad. Del mismo modo, si mientras sujetamos el peso empezáramos a andar y dado que la fuerza que realizamos es vertical pero andamos en la horizontal, tampoco realizaríamos trabajo. Sin embargo, lo que en realidad ocurre es que ahora, además de mantener la energía potencial, como nos estamos desplazando horizontalmente, desarrollamos mayor energía cinética y nos cansamos aún más.

3.1.2. Potencia.

Definimos la potencia como el trabajo efectuado en la unidad de tiempo. Así si efectuamos un trabajo muy rápidamente habremos desarrollado mucha potencia.

En un instante de tiempo muy corto, definimos la potencia instantánea como:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = m\vec{a}\cdot\vec{v} \qquad [4]$$

Debido a la última igualdad, si la potencia desarrollada es constante en el tiempo, a medida que la velocidad crece la aceleración debe disminuir. Esto ocurre, por ejemplo, en el motor de un coche y debido a que su potencia es constante, un coche no acelera tan rápido de 100 *km/h* hasta 200 *km/h* como acelera de 0 *km/h* a 100 *km/h*.

Las unidades de trabajo y de energía en el sistema internacional de denominan julios (*J*) siendo 1 *J* = 1 *Nm* = 1 $kg\frac{m^2}{s^2}$. (Recordamos que el trabajo tiene las mismas unidades que el par o momento de fuerza. Como dijimos, en § 2.6.2. el momento de fuerza se relaciona con la palanca y en una palanca la cantidad que se conserva es la energía.)

La unidad de potencia en el sistema internacional es el watio (*W*). Conviene señalar que la unidad *kilowatio-hora* = 3.6 × 10^6 *J*, es una unidad de consumo (energía) y no de potencia.

Ejemplo 1: Un automóvil de 1200 *kg* sube una rampa de α = 5º con velocidad constante de 36 *km/h*. Calcular el trabajo hecho por el motor en 5 minutos y la potencia del motor.

Llamemos *F* a la fuerza que desarrolla el motor del coche. Si aplicamos la 2ª ley de Newton, resulta:

$$F - mg\sin\alpha = ma = 0 \;\Rightarrow\; F = mg\sin\alpha = 1200\cdot 9.8\cdot\sin 5 = 1.023\times 10^3\,N,$$

Ahora:

v = 36 *km/h* = 10 *m/s* $\Rightarrow$ en 5 minutos (300s) recorrerá $s = vt = 10\cdot 300 = 3\times 10^3\,m$

de donde $W = Fs = \left(1.023\times 10^3\,N\right)\left(3\times 10^3\,m\right) = 3.069\times 10^6\,J$

La potencia la podemos calcular de dos formas:

1) $P = \frac{W}{t} = \frac{3.069\times 10^4}{3\times 10^3} = 1.023\times 10^4\,W$

2) $P = Fv = \left(1.023\times10^{3} N\right)(10 m/s) = 1.023\times10^{4} W$

Ejemplo 2: Un camión de masa m acelera desde el reposo en t = 0 con potencia P constante a) Determinar $v(t)$; b) Demostrar que si x = 0, en t = 0 entonces $x(t) = \sqrt{\frac{8P}{9m}}\, t^{3/2}$

a) Podemos escribir: $dv = a\cdot dt = \frac{P}{mv} dt \;\Rightarrow\; v\,dv = \frac{P}{m} dt \;\Rightarrow\; \int_0^t dt = \int_0^v \frac{mv}{P} dv$

$\Rightarrow\; t = \frac{m}{P}\frac{v^2}{2} \;\Rightarrow\; v = \left(\frac{2P}{m}\right)^{1/2} t^{1/2}$

b) $dx = v\,dt = \left(\frac{2P}{m}\right)(t)^{1/2} dt \;\Rightarrow\; x = \left(\frac{2P}{m}\right)^{1/2} \int_0^t t^{1/2} = \left(\frac{8P}{9m}\right)^{1/2} t^{3/2}$

3.2. Energía cinética.

Sabemos que $dW = F_t\, ds = m\frac{dv}{dt} ds = m\, dv \frac{ds}{dt} = mv\, dv$ y entonces:

$$W = \int_A^B F_t\, ds = \int_A^B mv\, dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

por lo que el trabajo efectuado sobre una partícula es igual al cambio en su energía cinética.

Y designamos por:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \text{ ó } E_k = \frac{p^2}{2m} \qquad [5]$$

a la energía cinética de traslación.

Igual que el trabajo, la energía se mide en julios. Es importante señalar otra unidad de energía que se utiliza en tecnología electrónica, el electro-voltio (*eV*). Es la energía cinética que adquiere un electrón que es acelerado por una diferencia de potencial de 1 voltio. $1 eV = 1.6\times10^{-19} J$

Además de la energía cinética de traslación, existe la energía cinética de rotación que es la energía que posee un cuerpo que rota pero no se traslada (como veremos en el capítulo 5).

3.3. Energía potencial y fuerzas conservativas.

Una fuerza es conservativa si su dependencia con $\vec{r}$ (ó con x, y, z) es tal que el trabajo W desarrollado por dicha fuerza entre la posición inicial A y final B, puede ser expresado como la diferencia de los valores de una función $E_p(x, y, z)$ entre la posición final B e inicial A. A esta función $E_p(x, y, z)$ se la denomina energía potencial y, de su propia definición, vemos que el trabajo realizado por una fuerza conservativa sólo depende de cuáles son los puntos final B e inicial A, y no depende de su trayectoria.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{p_A} - E_{pB} \qquad [6]$$

La energía potencial representa físicamente una forma de medir la cantidad de trabajo que está almacenado y que potencialmente se podría desarrollar. De ahí su nombre. Se debe recalcar que la energía potencial es un escalar.

Puesto que el trabajo se evalúa como una diferencia de valores de la energía potencial entre dos puntos, el valor del origen (punto de referencia) de dicha función es arbitrario y carece de importancia. Por ejemplo, cerca de la superficie de la Tierra (hasta miles de metros), la aceleración de la gravedad g se puede suponer constante, y la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre un cuerpo de masa m sería $F = -mg$ (donde el signo menos se debe a que la fuerza es atractiva). Así, al aplicar la ecuación [6] tendremos que el trabajo que realiza la fuerza de la gravedad cuando un cuerpo cae desde altura A hasta una altura B será:

$$W = \int_A^B - mg \cdot dy = mgA - mgB = E_{p_A} - E_{pB} \qquad [7]$$

por lo que el trabajo realizado por la gravedad depende de la diferencia de alturas y no de cual es el origen de alturas.

En vista de la ecuación [7], para un cuerpo de masa m, podemos definir, la energía potencial gravitatoria cerca de la Tierra como:

$$E_p = mgh \qquad [8]$$

donde h es la altura respecto del nivel que hayamos fijado como origen.

Puesto que para la fuerza gravitatoria ha sido posible encontrar una función de energía potencial que cumpla [6], entonces podemos concluir que la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa.

Como hemos dicho, es una característica de las fuerzas conservativas que el trabajo efectuado por ellas cuando actúan sobre un cuerpo es independiente de la trayectoria seguida por el cuerpo. El trabajo efectuado por ellas sólo depende de dónde están el punto inicial y el punto final. De aquí se deduce que el trabajo efectuado por una fuerza conservativa sobre una trayectoria cerrada es nulo, ya que entonces el punto inicial (*A*) es el mismo que el final (también *A*) y en este caso se anula la ecuación [7]:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{pA} - E_{pA} = 0 \qquad [9]$$

donde el círculo en la integral significa que es una integral de línea cerrada.

A partir de la ecuación [6], podemos escribir:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{pA} - E_{pB} = -\int_A^B dE_p \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$$

y como $\vec{F} \cdot d\vec{r} = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\theta \, ds = F_t \, ds \quad \Rightarrow \quad F_t = -\frac{dE_p}{ds}$. Es decir, la componente de la fuerza en dirección del movimiento es la derivada de la energía potencial en esa dirección cambiada de signo. En forma matemática esto se expresa indicando que el vector $\vec{F}$ es el resultado de un operador vectorial, llamado gradiente, que actúa sobre la energía potencial cambiada de signo. El operador gradiente se escribe mediante *grad* o mediante el símbolo nabla (∇):

$$\vec{F} = -grad\ E_p = -\nabla E_p \qquad [10]$$

El gradiente tiene expresiones distintas dependiendo del sistema de coordenadas en que se esté trabajando. Para coordenadas cartesianas, el gradiente se escribe como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad [11]$$

y la ecuación [10] queda:

$$\vec{F} = -\nabla E_p = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k} \qquad [12]$$

donde la energía potencial E_p depende de las coordenadas cartesianas $E_p(x, y, z)$

Para las fuerzas que se usan con mayor frecuencia (gravitatoria, electrostática y elástica), la energía potencial depende sólo de una coordenada de modo que el operador gradiente es simplemente la derivada respecto a esa coordenada.

3.3.1. Ejemplos: Fuerza gravitatoria, electrostática y elástica.

Fuerzas gravitatorias y electrostáticas.

Son del tipo $\vec{F} = \dfrac{k}{r^2}\vec{u}_r$ donde k es una constante. Como estas fuerzas dependen únicamente de la coordenada r, podemos escribir:

$$F = -\frac{dE_p}{dr} \quad \Rightarrow \quad E_p = -\int F \cdot dr = -\int \frac{k}{r^2} dr = \frac{k}{r} + C$$

que nos da la forma de la energía potencial para estas fuerzas. La constante de integración C depende del origen que elijamos. Normalmente, el origen de energías potenciales ($E_p = 0$) se toma en $r = \infty$, de modo que $C = 0$.

Para la fuerza gravitatoria, la constante k está relacionada con la ley de gravitación universal de Newton que empleamos en § 2.6.3. Para un cuerpo de masa m en el campo gravitatorio terrestre, se cumple: $k = GM_T \cdot m$ de modo que la energía potencial es:

$$E_p(r) = -G\frac{M_T m}{r} \qquad [13]$$

donde el signos menos se debe a que la fuerza es atractiva.

Constante de gravitación universal $G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$;

Masa de la Tierra $M_T = 5.98 \times 10^{24}\ kg$; Radio de la Tierra $R_T = 6370 \times 10^3\ m$

Para distancias h cercanas (miles de metros) a la superficie de la Tierra $h << R_T$, si tomamos $r = R_T + h$ en [13], podemos desarrollar E_p por Taylor en torno a h y se tiene a primer orden: ($f(h) = f(0) + hf'(0) + \ldots$)

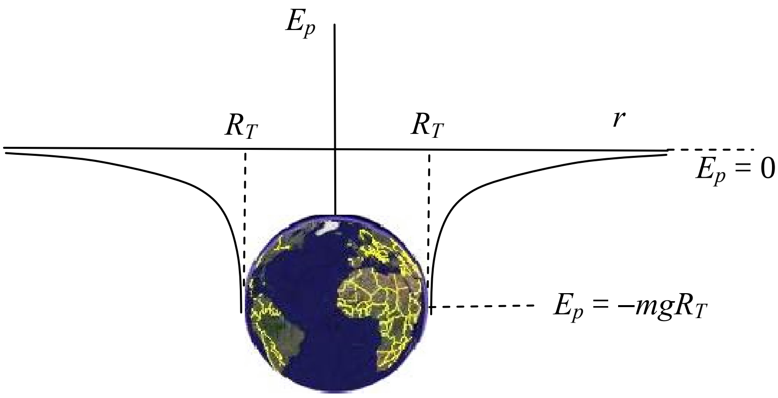
$$E_p = -G\frac{M_T m}{R_T} + hG\frac{M_T m}{R_T^2} + \ldots$$

Ahora, si observa que la gravedad es $g = G\dfrac{M_T}{R_T^2}$ (según se puede comprobar con una calculadora), queda:

$$E_p = -mgR_T + mgh$$

con lo cual hemos vuelto a hallar la expresión [8] salvo una constante, que como hemos dicho, no tiene importancia en las energías potenciales.

Podemos representar la energía potencial gravitatoria de la ecuación [13]:



La figura indica que un objeto que esté a cualquier distancia r de la Tierra, si no hubieran más astros celestes, sería atraído hacia su superficie. En este sentido la ecuación [13] representa una energía potencial en la que los puntos de la superficie de la Tierra son de puntos de equilibrio estable. Cualquier objeto podría llegar desde el infinito y quedar atrapado en la Tierra.

Fuerza elástica.

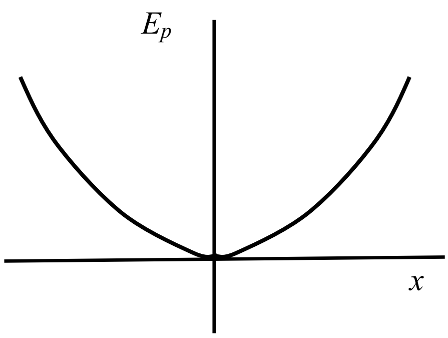
Para un muelle, se cumple la ley de Hook: $\vec{F} = -kx\,\vec{u}_x$. Como esta fuerza depende únicamente de la coordenada x, podemos escribir:

$$F = -\frac{dE_p}{dx} \quad \Rightarrow \quad E_p = -\int F \cdot dx = -\int -kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

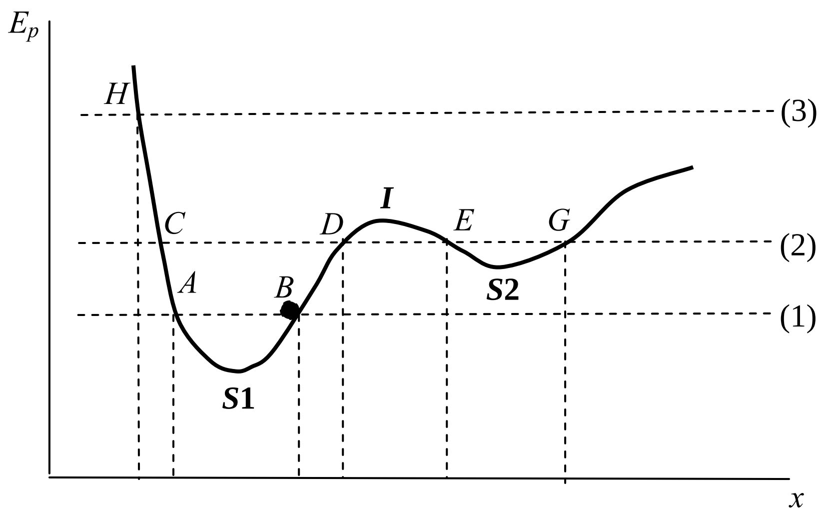
y ya que $F = 0$ en $x = 0 \;\; \Rightarrow \;\; C = 0$. Por tanto, la energía potencial elástica es:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \qquad [14]$$

Si representamos la energía potencial elástica [14], vemos que obtenemos una parábola. El centro de la parábola, representa el punto de equilibrio del muelle y es un punto energéticamente estable, ya que si estiramos o comprimimos el muelle y luego lo soltamos, el muelle siempre vuelve a su posición de equilibrio.



En general, al representar cualquier curva de energía potencial frente a un coordenada y podremos obtener estudiar el comportamiento de un sistema.



Supongamos una partícula que se encuentra en el punto x que corresponde a la abcisa del punto B. Si su un nivel de energía total es (1), la partícula podría descender por la rampa de la parábola, pasar por el punto más bajo $S1$, ascender hasta el punto A y luego volvería en sentido contrario. Si no hubiera ninguna pérdida energética la partícula estaría oscilando entre A y B. Estos puntos se llaman puntos de retorno.

Si una partícula se encuentra en reposo en el punto en $S1$ ó en el punto $S2$ y se la desplaza ligeramente en x y se la deja en libertad, entonces la partícula tiende a volver a su punto original. A los puntos $S1$ y $S2$ se les llama puntos de equilibrio y son mínimos de la función de energía potencial y cumplen $\frac{dE_p}{dx} = 0$ y $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$

Por el contrario, una partícula que se encuentre en el punto I y sea desplazada, no tiene tendencia a regresar a dicho punto. El punto I es un punto de equilibrio inestable y es un máximo de la función $\frac{dE_p}{dx} = 0$ y $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$

Un partícula que tenga un nivel energético (2), podrá oscilar entre los puntos C y D, ó entre los puntos E y G pero nunca podrá atravesar la zona comprendida entre D y E que se denomina barrera de potencial. Esto es cierto en toda la Mecánica Clásica. En realidad, para la llamada Mecánica Cuántica que se descubrió a principios del siglo XX y que ocurre en los sistemas atómicos, sí es probable que una partícula atraviese determinadas barreras de potencial ya que, en Mecánica Cuántica una partícula se puede comportar a la vez como onda y como partícula. Esta posibilidad de atravesar barreras de potencial se denomina efecto túnel. Se han desarrollado dispositivos tecnológicos basados en este fenómeno como los diodos Zener y diodos túnel como resonadores amplificadores ultrarrápidos.

Una partícula que tenga nivel energético (3) si es liberada desde H podría llegaría más lejos que G y nunca regresaría por lo tanto el movimiento ya no sería oscilatorio.

El punto de equilibrio $S2$ es mucho menos profundo que el punto $S1$ y, por tanto, a una partícula que se encuentre en $S2$ le será muy fácil absorber energía y caer en $S1$. Los puntos de equilibrio estable poco profundos como $S2$ se les llama puntos metasestables y representan estados transitorios en un sistema.

Para todos nuestros razonamientos anteriores, ha sido muy visual suponer que una partícula se puede mover por la función E_p como si fuera deslizando por una montaña rusa. En este caso, la energía potencial gravitatoria de la partícula tendría la misma forma que la montaña rusa. Sin embargo, todas las conclusiones anteriores respecto a la estabilidad o inestabilidad seguirían siendo válidas si la partícula se moviera en un movimiento unidimensional en x (no bidimensional como en la montaña rusa) y tuviera una $E_p(x)$ con máximos y mínimos. Así, el movimiento de una partícula unida a un muelle es unidimensional pero la forma de su energía potencial elástica [14] es una parábola con el punto de estabilidad en el origen que corresponde al punto de equilibrio del muelle.

3.4. Fuerzas no conservativas.

Son aquellas en las que el trabajo depende de la trayectoria. El ejemplo más común es el rozamiento, aunque hay otros menos conocidos como la fuerza de arrastre que aparece sobre una carga eléctrica (fuerza de Lorentz) cuando se mueve por un campo magnético.

Hay que destacar que el rozamiento es resultado de fuerzas de origen electrostáticas que sí son conservativas. Lo que ocurre es que debido a efectos termodinámicos (estadísticos) existe pérdida de energía en el sistema que depende del camino seguido. Aunque se regrese al mismo punto siempre se habrá perdido energía en el sistema. En realidad, al haber vuelto al mismo sitio tras haber recorrido un trayecto con rozamiento, todas las moléculas de los materiales no están en el mismo lugar que cuando se empezó el recorrido. El proceso no es reversible debido al aumento de entropía y a la aparición de nuevos estados accesibles al sistema.

3.5. Conservación de la energía

Definimos la energía mecánica total como $E_k + E_p$; si en el sistema no hay fuerzas no conservativas, en cualquier punto del recorrido, se cumple que la energía mecánica se conserva constante: $E_k + E_p = cte$.

En este caso, la energía mecánica total en el punto *A* (inicial) debe ser igual a la energía mecánica total en *B* (final)

$$\left(E_k + E_p\right)_A = \left(E_k + E_p\right)_B \qquad [15]$$

Si en el sistema existen fuerzas no conservativas, como el rozamiento, el trabajo W' efectuado por estas fuerzas durante un desplazamiento *S* será:

$$W' = \left(E_k + E_p\right)_A - \left(E_k + E_p\right)_B = F_r S \qquad [16]$$

Es conocida la frase del principio de conservación de la energía:

La energía ni se crea ni se destruye sólo se transforma.

Realmente, una vez descubierta la Teoría de la Relatividad de Einstein, se sabe que la masa se puede transformar en energía y viceversa. Actualmente es más adecuada la siguiente frese como principio de conservación de la energía:

La suma de las masas y energías del Universo es constante.