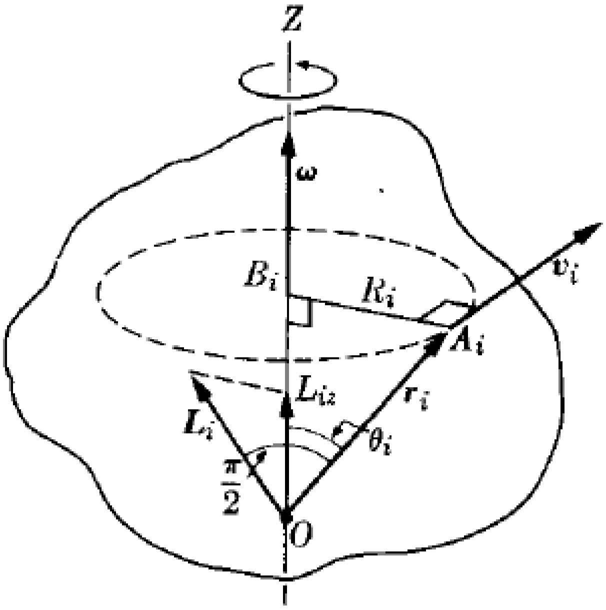
Tema 5 Dinámica de la rotación

5.1. Momento angular en el sólido rígido.

5.1.1. Definición del momento de inercia.

Cuerpo rotando alrededor del eje Z con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ con $\omega = cte$. Cada partícula describe una trayectoria circular con centro en el eje Z. La partícula A_i describe un círculo de radio R_i con velocidad:



$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \;\; \Rightarrow$$

$$\left|\vec{v}_i\right| = \omega\, r_i \sin\theta_i = \omega\, R_i \,.$$

El momento angular o cinético de A_i respecto del origen O es:

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

El vector $\vec{L}_i$ es perpendicular al plano que $\vec{r}_i$ forma con $\vec{v}_i$, y forma $\frac{\pi}{2} - \theta_i$ con el eje Z de rotación. La componente de $\vec{L}_i$ en el eje Z será:

$$L_{i\,z} = m_i r_i v_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = m_i \left(r_i \sin\theta_i\right) \cdot \omega\, R_i = m_i R_i^2 \omega$$

Extendiendo a todas las partículas del sólido, obtendremos la componente del momento angular total del cuerpo rotante a lo largo del eje de rotación Z:

$$L_z = \sum L_{i\,z} = \sum m_i R_i^2 \omega = I\omega \qquad [1]$$

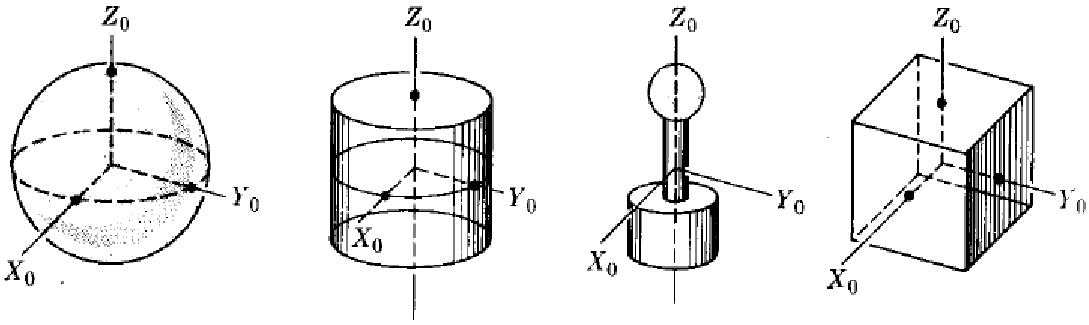
donde hemos definido $I = \sum m_i R_i^2$ como el momento de inercia con respecto al eje de rotación Z.

5.1.2. Ejes y momentos principales de inercia.

El momento angular total del sólido es la suma de los $\vec{L}_i$ individuales de cada partícula:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots = \sum \vec{L}_i$$

que, en general, no es paralelo al eje de rotación, ya que cada $\vec{L}_i$ no lo es individualmente.



En todos los cuerpos sin importar su forma se puede demostrar que existen al menos tres ejes ortogonales entre si llamados ejes principales de inercia y para los cuales $\vec{L}$ es paralelo al eje de giro y, por tanto, a $\vec{\omega}$. Cuando el cuerpo tiene algún eje de simetría, los ejes principales coinciden con estos ejes.

Si el cuerpo rota alrededor de un eje principal entonces además de cumplirse [1], se cumple también que: $\vec{L} = I\vec{\omega}$ y como $\vec{L}$ es paralelo a $\vec{\omega}$:

$$L = I\omega \qquad [2]$$

Siendo I el momento de inercia para ese eje en concreto.

En el caso más general que el cuerpo no rote entorno a un eje de inercia, el momento angular se puede expresar en función de los ejes de inercia. La expresión resultante es entonces más compleja. En este tema sólo estudiaremos situaciones de giro alrededor de ejes principales de inercia.

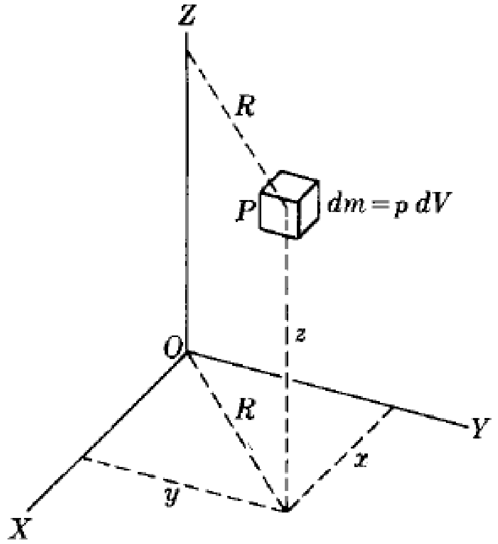
5.2. Cálculo del momento de inercia.

5.2.1. Propiedades del momento de inercia.

Para un cuerpo continuo en la suma que aparece en [1] para el momento de inercia, reemplazamos el sumatorio por una integral:

$$I = \sum m_i R_i^2 \quad \Rightarrow \quad I = \int R^2 dm$$

Y como $dm = \rho \cdot dV$ si el cuerpo es homogéneo podemos sacar la densidad fuera de la integral: $\qquad I = \rho \int R^2 dV$



Si llamamos al eje de giro del cuerpo *Z*, se cumple que $R^2 = x^2 + y^2$, y el momento de inercia entorno a el eje *Z* será:

$$I_z = \rho \int \left(x^2 + y^2\right) dV \qquad [3]$$

Y existirían expresiones similares en el supuesto de giros entorno a los ejes *X* e *Y*:

$$I_x = \rho \int \left(y^2 + z^2\right) dV$$

$$I_y = \rho \int \left(x^2 + z^2\right) dV$$

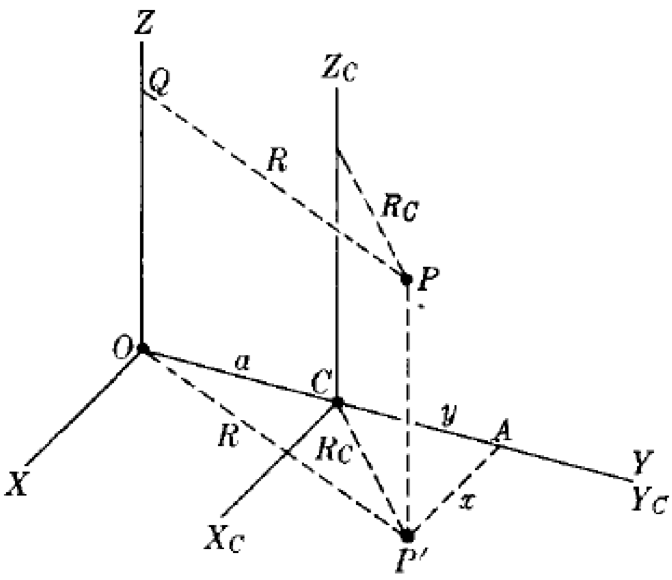
Si tenemos una placa delgada ($z \approx 0$ en las expresiones anteriores), entonces se cumple que: $I_z = I_x + I_y$

5.2.2. Teorema de Steiner.

El teorema de Steiner o de los ejes paralelos que se cumple para cualquier cuerpo indica lo siguiente: Sea *Z* un eje arbitrario y Z_C un eje paralelo que pasa por el centro de masa del cuerpo, si *a* es la separación entre ambos ejes, se cumple la siguiente relación:

$$I = I_C + Ma^2 \qquad [4]$$

donde *I* e I_C son los momentos de inercia respecto a *Z* y Z_C, respectivamente, y *M* es la masa del cuerpo.



Demostración:

Tomamos un sistema *X*, *Y*, *Z* de centrado en *O*. Escogemos otro sistema con ejes X_C, Y_C, Z_C de modo que su origen se encuentre en el centro de masa *C* del cuerpo, y el eje Y_C coincida con el eje *Y*. Un punto cualquiera *P* del cuerpo tiene en este sistema *C* las coordenadas (*x*, y, *z*). En este sistema C, el propio centro de masas tiene por coordenadas (0,0,0) ya que según la definición de centro de masas

$$0 = \frac{\sum mx}{\sum m} \qquad 0 = \frac{\sum my}{\sum m} \qquad 0 = \frac{\sum mz}{\sum m}$$

donde la sumatoria se extiende a todas las partículas del cuerpo.

Según la figura: $R_C^2 = x^2 + y^2$

$$R^2 = x^2 + (y+a)^2 = x^2 + y^2 + a^2 + 2ya = R_C^2 + 2ya + a^2$$

El momento de inercia respecto al eje Z es:

$$I = \sum mR^2 = \sum m\left(R_C^2 + 2ya + a^2\right) = \sum mR_C^2 + 2a\left(\sum my\right) + a^2 \sum m$$

Ahora tenemos: $\sum mR_C^2 = I_C$

$$a^2 \sum m = Ma^2$$

$2a\left(\sum my\right) = 0$ ya que, por la situación escogida del centro de masas en C habíamos visto que $0 = \frac{\sum my}{\sum m} \Rightarrow \sum my = 0$

Luego: $I = I_C + Ma^2$ que es la ecuación [4].

5.2.3. Radio de giro.

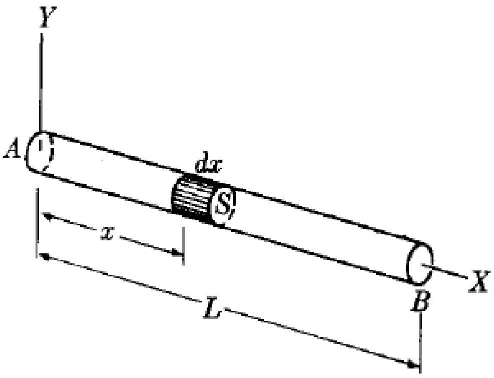
El radio de giro K para un cuerpo de masa M que rota alrededor de un eje concreto es una distancia tal que el momento de inercia I del cuerpo respecto a ese eje se puede expresar como: $I = MK^2$, de modo que:

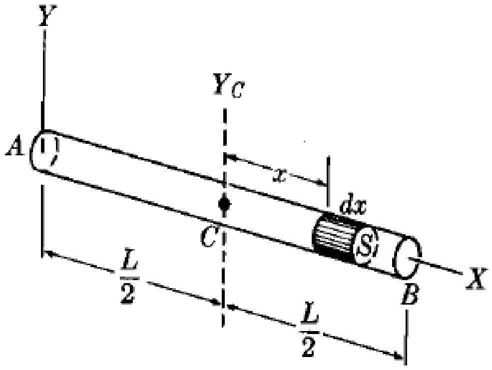
$$K = \sqrt{\frac{I}{M}} \qquad [5]$$

Representa la distancia al eje a la que se puede concentrar toda la masa del cuerpo sin variar su inercia al giro.

El cálculo de momentos de inercia de volúmenes y placas de forma general es un problema complejo de carácter matemático. Existen tablas de momentos de inercia para figuras típicas de 2 y 3 dimensiones.

Ejemplo: Cálculo del momento de inercia de una varilla delgada homogénea con respecto a un eje perpendicular a la varilla y que pasa (a) a través de un extremo, (b) por el centro.





a)

$$I = \int x^2 dm = \int x^2 \rho\, dV = \rho\, S \int_0^L x^2 dx = \rho S \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

donde se ha utilizado $dV = S\, dx$ en la 3ª igualdad y $\rho\, SL = \rho\, V = M$ en la última.

b) Un método sería proceder como en el método anterior pero integrar desde $-L/2$ hasta $L/2$. Otro método es aplicar el teorema de Steiner: $I_A = I_C + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \qquad I_C = I_A - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12}$$

5.3. Momento de fuerza y 2ª ley de Newton para la rotación en el sólido rígido.

En la ecuación [13] de §4.6 vimos que para un sistema de partículas:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_{i\,ext}\right] = \sum \vec{M}_{A\,i}$$

siendo *A* un punto fijo.

Si la rotación del sólido es entorno a un eje principal se cumple $\vec{L} = I\vec{\omega}$ y entonces:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \sum \vec{M}_{O\,i} \qquad [6]$$

y, además, se debe cumplir que el eje principal de giro es tal que en el cuerpo existe un punto *O* fijo (que no se traslade).

Si el eje de rotación no tiene ningún punto fijo, vimos en [15] de §4.6.2 que:

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_{i\,ext} = \sum \vec{M}_{C\,i}$$

resultando entonces una ecuación equivalente a la [6]:

$$I_C \vec{\alpha} = \sum \vec{M}_{C\,i} \qquad [7]$$

que es válida aunque el centro de masas C no esté fijo (se traslade incluso con aceleración).

Esta ecuación es la expresión de la 2ª ley de Newton para la rotación en sólidos y junto con la 2ª ley de Newton para la traslación ($M\vec{a} = \sum \vec{F}_{i\,ext}$) se utilizará para resolver problemas de sólidos que se trasladen y giren.

5.4. Energía cinética de la rotación.

Para un sólido que rota respecto a cualquier eje, la energía cinética será:

$$E_k = \sum E_{k\,i} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i R_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad [8]$$

Si la rotación es entorno a un eje principal se puede utilizar $L = I\omega$ y resulta:

$$E_k = \frac{L^2}{2I} \qquad [9]$$

Si la rotación es entorno al centro de masas, tenemos: $E_k' = \frac{1}{2} I_C \omega^2$

donde I_C es el momento de inercia respecto al eje de rotación y que pasa por el centro de masas.

Y si además de rotar el sólido se traslada por el teorema de König de la energía:

$$E_k = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + E_k' = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \qquad [10]$$

Es importante recordar lo que dijimos al final de §4.4.3:

En un sólido rígido (que trataremos en el próximo capítulo), las fuerzas internas no pueden realizar trabajo ya que las distancias entre partículas se mantienen constantes. Esto implica que en un sólido rígido aislado no puede haber cambios de energía cinética si no hay fuerzas exteriores aplicadas.

De este modo le ecuación [7] de §4.4.1 queda:

$$\Delta E_k = W_{ext} \qquad [11]$$

Si todas las fuerzas exteriores son conservativas

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

y si además existen fuerzas no conservativas (como el rozamiento):

$$\Delta E_k = -\Delta E_p + W_{\text{no conserva}}$$

Es decir, si existe un estado inicial 1 y un estado final 2:

$$E_{k\,2} + E_{p\,2} = E_{k\,1} + E_{p\,1} + W_{\text{no conserva}} \qquad [11’]$$

En esta ecuación hay que tener en cuenta que siempre el rozamiento extrae energía del sistema (en este sentido $W_{\text{no conserva}}$ sería negativo). En la ecuación [11’], $\left(E_{k\,1} + E_{p\,1}\right)$ sería la energía mecánica total inicial del sistema (por ejemplo una rueda en lo alto de una rampa), que será mayor que la energía mecánica final $\left(E_{k\,2} + E_{p\,2}\right)$ (energía de la rueda a la salida de la rampa) ya que se habrá perdido una parte en rozamiento ($W_{\text{no conserva}}$).

5.5. Conservación del momento angular

Si el momento total de las fuerzas exteriores es nulo, por [6] tenemos: $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$

Y entonces el momento angular se debe conservar constante:

$$\vec{L} = cte \qquad [12]$$

Es decir, el momento angular en un estado inicial 1 será igual al momento angular en un estado final 2:

$$L_1 = L_2 \;\Rightarrow\; \sum m_i v_{i\,1} r_{i\,1} = \sum m_i v_{i\,2} r_{i\,2} \;\Rightarrow\; \sum m_i r_{i\,1} r_{i\,1} \omega_1 = \sum m_i r_{i\,2} r_{i\,2} \omega_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \qquad [13]$$

En esta ecuación se aplica en el clásico ejemplo de una patinadora que puede variar su velocidad de rotación. Si mientras gira extiende los brazos, entonces su momento de inercia aumentará (ya que aumenta su radio medio) y su velocidad angular disminuirá. Si junta los brazos, disminuye de nuevo su momento de inercia y vuelve a girar más deprisa. Todo esto se ejecuta, por supuesto, elegantemente…