2. Tratamiento de errores

2.1. Introducción

Se entiende por **medida** la observación cuantitativa de alguna magnitud definida en el ámbito de cualquier ciencia. Toda medida experimental adolece de imprecisión porque los métodos e instrumentos que se emplean para medir son imperfectos. Por eso, el número que expresa el resultado de una medida, además de ir acompañado de la correspondiente unidad, debe estar también acompañado de otro número menor que llamamos **error** y que es un índice de la imprecisión de la medida.

2.2. Tipos de errores

Una medida directa puede tener errores por tres motivos:

- **Errores sistemáticos**: se producen por una causa conocida y debe evitarse introduciendo la corrección oportuna (por ejemplo, el error de cero). Si no fuera posible evitarlos, las medidas deben corregirse teniendo en cuenta este error sistemático.
- **Errores de sensibilidad:** son debidos a la limitación en la precisión de cualquier aparato de medida.
- **Errores aleatorios:** se producen por causas desconocidas, por imprecisiones en el método de medida o porque la magnitud que se mide es intrínsecamente aleatoria.

2.3. Especificación de errores: error absoluto y error relativo

Si x denota el resultado de un experimento y δx su error, la expresión correcta del resultado medido debe ser en la forma siguiente

$$x \pm \delta x \,. \tag{2.1}$$

Indica que el valor verdadero de la magnitud se encuentra dentro del intervalo entre $x - \delta x$ y $x + \delta x$. La cantidad δx recibe el nombre de **error absoluto** de la medida.

El error puede expresarse también en porcentaje, lo que se conoce como **error relativo** δ_r definido como

$$\delta_r = \frac{\delta x}{x} \times 100 \,. \tag{2.2}$$

2.4. Medidas directas o por aparatos calibrados

Una vez eliminados o corregidos los errores sistemáticos, el error experimental δx asignado a la variable está determinado por el error de sensibilidad (o escala) del aparato y el error aleatorio del experimento.

2.4.1. Error de sensibilidad

El **error de sensibilidad o escala** δ_s es el que se deriva de la limitación en la escala mínima de los aparatos de medición. Cada medida individual está sujeta a este error. Se debe distinguir entre la medición con aparatos analógicos y digitales.

Cuando se efectúa la medición sobre una escala graduada de un aparato **analógico**, a menudo la indicación obtenida no se corresponde con una división exacta de la escala, sino que queda comprendida entre dos valores (por ejemplo, medidas hechas con una regla). En estos casos puede hacerse la estimación de forma visual y se puede apreciar hasta la mitad de la división de escala. Por tanto el error de sensibilidad δ_s asignado a la medida es la **mitad de la mínima división** del aparato de medida.

Por el contrario, cuando el aparato de medida es **digital**, la apreciación mínima que puede tomarse corresponde a la última cifra que indica el aparato. En estos casos, el error de sensibilidad δ_s que se debe asignar a la magnitud es igual a la **mínima división** del aparato.

2.4.2. Error aleatorio: desviación típica

El error aleatorio δ_a proviene del hecho de que, al repetir un experimento, los resultados pueden diferir. Para este tipo de errores, la estimación se hace mediante la **desviación típica** de los datos.

Supongamos que se realizan N medidas sucesivas $x_1, x_2 ..., x_N$ de una magnitud. Asumiendo que la distribución de los datos es normal, el valor más probable de la magnitud es el valor medio de los valores. Esto es, el valor $\bar{x}$ que se asigna a la magnitud es

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ . \tag{2.3}$$

El error aleatorio δ_a asociado a esta medida es la **desviación típica** de los datos (o error cuadrático medio), que viene dado por la expresión

$$\delta_a \equiv \sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{x} - x_i\right)^2} \tag{2.4}$$

Esta cantidad es una medida de la repetibilidad de los datos, ya que cuanto mayor es la desviación típica de los valores menor es el grado de coincidencia, y por tanto mayor es el error.

2.4.3. Dispersión de medidas

El número de medidas necesario de una magnitud para que el experimento pueda considerarse preciso depende de la repetibilidad de los valores obtenidos. El criterio que seguimos para determinar el número de medidas a realizar en un experimento es el siguiente:

- Se toman tres medidas x_1, x_2, x_3 de la magnitud y se calcula su valor medio $\bar{x}$ y la **dispersión** de los valores, definida como la diferencia entre los valores extremos, es decir, $D = x_{\max} - x_{\min}$.
- Se calcula la **dispersión relativa** de los valores, $d = (D / \bar{x}) \times 100$.
- Si d es menor al 2% es suficiente con las tres medidas realizadas.
- Si d está entre el 2% y el 8% se hacen seis medidas.
- Si d está entre el 8% y el 15% se hacen quince medidas.

- Si d es superior al 15% se hacen treinta medidas.

2.4.4. Cifras significativas y redondeos

Al presentar numéricamente un resultado se debe tener en cuenta el concepto de **cifra significativa**. El número de cifras significativas de un resultado se obtiene contando desde la derecha el número de cifras de la cantidad hasta que encontremos un último número no cero, a partir del cual todos números a la izquierda son ceros. Por ejemplo el número 0,023 tiene 2 cifras significativas. Si hubiésemos expresado el resultado como 0,0230, éste tendría 3 cifras significativas, y querría decir que el aparato de medida es capaz de medir hasta la cuarta cifra decimal.

Cuando se da el valor de una medida experimental, el criterio que tomamos es que **el error se expresa con una sola cifra significativa**. El valor siempre debe redondearse por exceso o por defecto según sea el valor más cercano.

El criterio para el resultado es asignar cifras significativas hasta el decimal que corresponde a la cifra del error. Por ejemplo, un resultado que sea 2,1 con un error 0,002 debe expresarse como 2,100±0,002. También se realiza el redondeo del resultado en función de cual es el valor más cercano. Por ejemplo, un resultado 4,256 con un error 0,1 debe expresarse como 4,3±0,1. En cambio, si el valor hubiese sido 4,226 se debería expresar como 4,2±0,1.

2.4.5. Expresión de errores

Cuando se realiza una medida experimental directa se deben comparar las dos fuentes de error, el error de sensibilidad o escala δ_s y el error aleatorio δ_a. La forma de presentar el resultado de la medida directa consiste en dar el valor medio $\bar{x}$ de las medidas realizadas y asignar a dicha medida un error δx igual al mayor de los dos errores, esto es $\delta x = \max(\delta_s, \delta_a)$.

<u>**Ejemplo**</u>: Consideremos que se hace una medida de tiempo con un cronómetro digital que aprecia hasta las centésima de segundo. Se hacen tres medidas y el resultado es el siguiente:

$$t_1 = 25{,}04 \pm 0.01\ s,$$
$$t_2 = 24{,}98 \pm 0.01\ s,$$
$$t_3 = 25{,}12 \pm 0.01\ s.$$

El valor medio de los valores es $\bar{t} = 25{,}0466$ y su dispersión relativa es $d = 0.55\%$. Como $d<2\%$ no es necesario tomar más medidas. El error de escala de cada medida es $\delta_s = 0.01\ s$. El cálculo del error aleatorio da como resultado $\delta_a = 0{,}0702\ s$. Por lo tanto, el mayor factor de error es el error aleatorio. Aplicando el criterio de una cifra significativa en el error, el resultado de la medida directa debe expresarse como

$$\bar{t} = 25{,}05 \pm 0.07\ s\ .$$

El error relativo es $\delta_r = 0{,}3\%$.

2.5. Medidas indirectas: propagación de errores

Las **medidas indirectas** son aquellas que se obtienen como resultado de aplicar una fórmula teórica sobre valores que son el resultado de medidas directas.

Si se tiene una cantidad y que es función de m variables $x_1, x_2, ..., x_m$, cada una con un error asociado δx_1, δx_2, ..., δx_m,, el cálculo del error δy asociado al resultado de una ecuación $y = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ se obtiene por cálculo de propagación de errores. Tomamos como criterio de error la propagación de errores absolutos. Se obtiene diferenciando la función f y asemejando las diferenciales a incrementos finitos, y por lo tanto a errores, se obtiene que

$$\delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \delta x_2 + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\right| \delta x_m\ . \tag{2.5}$$

Algunos autores consideran como criterio de error la propagación de errores cuadráticos, según el cual el error δy viene dado por la relación

$$\delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\delta x_m\right)^2}\ . \tag{2.6}$$

<u>Ejemplo</u>: se calcula la velocidad v de un cuerpo a partir de las medidas directas del espacio recorrido L y del tiempo t empleado en recorrerlo, utilizando la relación $v = L/t$. Suponemos que los valores obtenidos son

$$\overline{L} = 10{,}51 \pm 0{,}05\ m,$$
$$\overline{t} = 20{,}54 \pm 0{,}08\ s.$$

El valor de la velocidad es $v = 0{,}51168\ m/s$, donde se utilizan los valores medios $\overline{L}$ y $\overline{t}$. El error δv que se debe asignar a la velocidad es

$$\delta v = \left|\frac{1}{t}\right|\delta L + \left|\frac{L}{t^2}\right|\delta t = 0{,}00442\ m/s\ ,$$

donde nuevamente se usan los valores de $\overline{L}$ y $\overline{t}$ para evaluar la expresión. Por lo tanto, aplicando el criterio de una cifra significativa en el error, la velocidad debe expresarse como

$$v = 0{,}512 \pm 0{,}004\ m/s\ .$$

Algunos ejemplos de propagación de errores en funciones sencillas son:

- **Suma** o **resta**: $y = x_1 \pm x_2 \Rightarrow \delta y = \delta x_1 + \delta x_2$
- **Producto**: $y = x_1 x_2 \Rightarrow \delta y = |x_2|\delta x_1 + |x_1|\delta x_2$
- **Cociente**: $y = \dfrac{x_1}{x_2} \Rightarrow \delta y = \dfrac{\delta x_1}{|\delta x_2|} + \dfrac{|x_1|\delta x_2}{x_2^2} \Rightarrow \dfrac{\delta y}{|y|} = \dfrac{\delta x_1}{|x_1|} + \dfrac{\delta x_2}{|x_2|}$

2.6. Consideraciones para la reducción de errores

A continuación se dan algunas normas que se deben tener en cuenta al realizar una experiencia, y que ayudan a reducir los errores.

1. Se debe comenzar planificando bien la experiencia, señalando claramente las variables a medir.
2. Delimitar los intervalos de variación de las variables a medir y probar diversas partes del dispositivo experimental para hacer una primera estimación del resultado.
3. Realizar una experiencia preliminar, para encontrar la mejor manera de tomar las medidas experimentales.

4. Hacer todas las medidas en el intervalo de tiempo más corto posible, para evitar que alguna variable que debe permanecer constante pueda cambiar.
5. Calibrar correctamente los aparatos de medida.
6. Corregir o tener en cuenta el error de cero de los aparatos de medida, a fin de evitar los errores sistemáticos.
7. Evitar el **error de paralaje** que se tiene cuando el objeto que se quiere medir se encuentra a cierta distancia de la escala, con lo que la línea de mirada varía el resultado, aumentando el error. Este tipo de error es común en aparatos en los que una aguja se mueve sobre una escala. La forma de evitarlo es procurar que la separación entre la aguja y la escala sea mínima.
8. En la medida de funciones periódicas, en lugar de medir un solo periodo, hacer la medida sobre N periodos, con objeto de reducir el error absoluto de la medida. Se calcula el periodo como medida indirecta.
9. En las medidas en circuitos eléctricos, es conveniente garantizar que las conexiones estén bien seguras, ya que sino pueden aparecer resistencias adicionales que enmascaren los resultados.
10. Hacer las medidas de forma relativa siempre que sea posible, dada la comodidad que presentan.
11. Si existen simetrías en el dispositivo experimental conviene efectuar intercambios, con lo que las medidas deberán quedar teóricamente inalterables. De esta manera se puede comprobar la bondad de los resultados.

2.7. Representación gráfica

La presentación de los resultados en forma de gráficas tiene gran utilidad ya permite obtener una **concepción visual** de la evolución de un experimento en función de una variable. Además se utiliza para determinar el valor de una magnitud, por lo general la pendiente de una recta, que representa la relación entre dos variables.

2.7.1. Gráficas y tablas

Nos restringimos a gráficas del tipo $y = f(x)$. Se utilizan para representar un experimento físico en el que se varía de manera controlada una variable x (que se representa en el eje de abcisas), y se mide su incidencia en otra variable relacionada y (que se representa en el eje de ordenadas).

La mejor forma de presentar las gráficas es de la manera más sencilla posible, pero que contenga toda la información del experimento. Los ejes coordenados deben tener **títulos** que indiquen de qué **magnitud** se trata, y en qué **unidades** se expresa. Las escalas de ambos ejes deben abarcar todo el intervalo de medidas realizadas, y solamente éste, aunque para ello el origen de coordenadas no coincida con el valor cero. Es conveniente que en el fondo de la gráfica se presente una rejilla asociada a valores enteros de la escala de los ejes, para poder apreciar los valores de los puntos experimentales.

Los datos se presentan en forma de puntos. Estos puntos tienen que estar acompañados de **barras de error**, tanto verticales como horizontales que indiquen la imprecisión en las variables x e y. Si se presentan varias curvas en una misma gráfica, es conveniente introducir una **leyenda** asignando la característica de cada una de las curvas.

2.7.2. Ajuste por mínimos cuadrados

En muchas ocasiones la relación funcional entre las variables x e y es mediante una recta $y = Ax + B$, donde A y B son dos constantes que pueden tener interés físico. Conviene poder evaluar su valor y su error a partir de los datos experimentales. El problema consiste en obtener los valores de A y B que mejor representen un conjunto de N valores experimentales $\{x_i, y_i\}$, $i = 1,2...N$. El criterio que se sigue es obtener la recta que minimice la suma de los cuadrados de las distancias $d_i = y_i - (Ax_i + B)$.

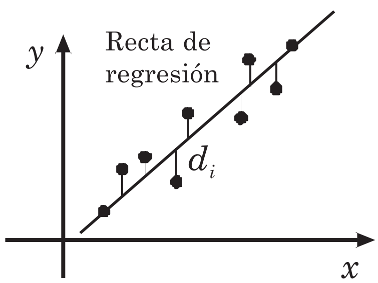


Figura 2.1. Se minimiza la suma de los cuadrados de las distancias d_i a la recta de regresión.

El resultado de dicho ajuste por mínimos cuadrados se puede expresar en función de los puntos $\{x_i, y_i\}$ como

$$A = \frac{N\left(\sum_i x_i y_i\right) - \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_i y_i\right)}{N\left(\sum_i x_i^2\right) - \left(\sum_i x_i\right)^2}, \tag{2.6a}$$

$$B = \frac{\left(\sum_i y_i\right)\left(\sum_i x_i^2\right) - \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_i x_i y_i\right)}{N\left(\sum_i x_i^2\right) - \left(\sum_i x_i\right)^2}. \tag{2.6b}$$

Expresiones más elaboradas nos permiten determinar el error de A, y el error de B:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (y_i - Ax_i - B)^2}{N-2}}$$

$$\Delta A = \frac{\sqrt{N}\cdot\sigma}{\sqrt{N\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}}$$

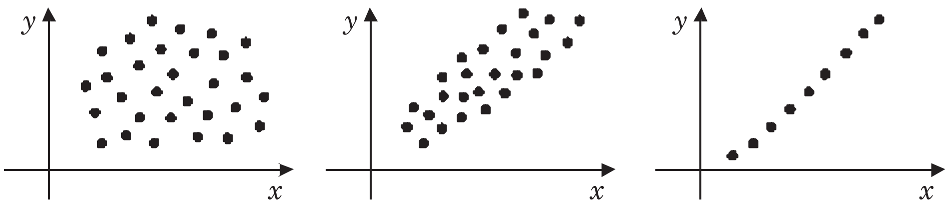
$$\Delta B = \Delta A\sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{N}}$$

El ajuste mediante una recta de regresión no es solamente válido para el caso de un experimento que sigue una ley lineal. Se pueden ajustar a una recta otros comportamientos sin más que hacer una transformación de los datos. Algunos ejemplos son:

- Ajuste de $y = (ax+b)^{-1}$: Se representa $y^{-1} = ax + b$. Definiendo $\tilde{x}_i = x_i$ e $\tilde{y}_i = y_i^{-1}$ se puede hacer un ajuste a una recta $\tilde{y} = A\tilde{x} + B$, y los parámetros obtenidos se relacionan con los de la ley original según $A = a$ y $B = b$.
- Ajuste de $y = b\exp(ax)$: se representa $\ln y = \ln b + ax$. Definiendo $\tilde{x}_i = x_i$ e $\tilde{y}_i = \ln y_i$ se puede hacer un ajuste a una recta $\tilde{y} = A\tilde{x} + B$, y los parámetros obtenidos se relacionan con los de la ley original según $A = a$ y $B = \ln b$.
- Ajuste de $y = ba^x$: se representa $\ln y = \ln b + x\ln a$. Definiendo $\tilde{x}_i = x_i$ e $\tilde{y}_i = \ln y_i$ se puede hacer un ajuste a una recta $\tilde{y} = A\tilde{x} + B$, y los parámetros obtenidos se relacionan con los de la ley original según $A = \ln a$ y $B = \ln b$.

2.7.3. Correlación

Si nos fijamos en los tres conjuntos de datos que se representan en la figura, se observa que en el primero de ellos los datos se esparcen en forma de nube, sin una relación entre ellos. En el segundo, la variable y tiene una tendencia a aumentar a medida que x aumenta. Finalmente el tercero presenta una dependencia lineal muy acusada.



(a) (b) (c)

Figura 2.2. Distribución de datos (a) sin correlación, (b) con dependencia estadística y (c) con dependencia funcional (correlacionados)

Se dice entonces que los datos x e y de la primera gráfica no están **correlacionados**, o que son independientes. En el segundo caso se dice que los datos presentan una **dependencia estadística**, mientras que en el tercer caso presentan una **dependencia funcional**. Para evaluar numéricamente estas tendencias se define un **coeficiente de correlación** r que puede tomar valores entre -1 y $+1$. Si el valor de $|r|$ es igual o similar a 1 entonces existe una dependencia funcional; si es igual o cercano a cero, entonces las variables son independientes. El coeficiente de correlación viene dado por la expresión.

$$r = \frac{N\left(\sum_i x_i y_i\right) - \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_i y_i\right)}{\sqrt{\left(N\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2\right) - \left(N\sum_i y_i^2 - \left(\sum_i y_i\right)^2\right)}} . \qquad (2.8)$$

Tanto el ajuste mediante las ecuaciones (2.7) como la evaluación del coeficiente de correlación dependen del número N de medidas realizadas. **Tomamos como criterio tomar al menos $N = 6$ medidas diferentes para poder considerar los resultados válidos.**

2.8. Informe y memoria de una experiencia

Al realizar una experiencia, los datos deben anotarse con la máxima claridad ya que frecuentemente serán analizados más adelante. Es aconsejable hacer las gráficas y cuadros de datos en el mismo laboratorio mientras se hace la experiencia.

El **guión de prácticas** es un documento que especifica el objetivo de la práctica, su metodología y sirve de guía para su realización. El **informe de prácticas** es el documento que presenta los resultados del experimento. Los apartados que debe contener el informe de prácticas son:

1. Objetivo de la práctica.
2. Breve descripción teórica.
3. Breve descripción y reseña de incidencias del montaje experimental.
4. Descripción comentada y reseña de incidencias del desarrollo experimental.
5. Análisis de los datos.
    - Tablas de datos.
    - Análisis estadístico.
    - Análisis gráfico.
6. Presentación y discusión de resultados. Conclusiones.

Bibliografía

1. C. Sánchez del Río, Análisis de errores, Ed. Eudema.