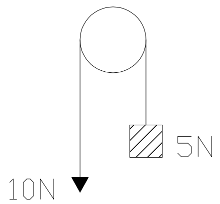
PROBLEMAS RESUELTOS TEMA: 2

1.- a) Tenemos una cuerda que pasa por una polea. En un extremo de la cuerda cuelga un peso de 5 N y por el otro se aplica una fuerza de 10 N. Hallar la aceleración del peso.

b) Si en lugar de la fuerza de 10 N, colgamos un peso de 10 N. ¿Será igual la aceleración que en el caso a).

a)



La fuerza de 10 N que se aplica a la cuerda, se transmite al peso. Aplicamos la segunda ley de Newton al peso: $\Sigma F = m \cdot a$

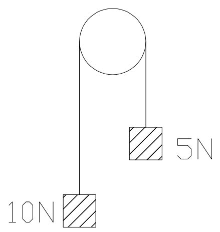
Sobre el peso actúan la fuerza de 10 N que se aplica y el peso de 5 N pero con sentido contrario a la fuerza:

$$F - P = m \cdot a$$

Donde $m = \frac{P}{g}$, con lo que la ecuación es la siguiente:

$10 - \frac{5}{g} g = \frac{5}{g} a \quad \rightarrow \quad 5 = \frac{5}{g} a \quad \rightarrow \quad g = a = 9.81 \text{ m/s}$ Esta es la aceleración con la que sube el peso.

b)



En el caso en que colgamos un peso de 10 N, aplicamos la 2ª ley de Newton a cada uno de los dos bloques. Llamamos P_1 al bloque de 10 N y P_2 al bloque de 5 N. Con lo que hallamos las dos ecuaciones siguientes:

$$P_1 - T = \frac{P_1}{g} a$$

$$T - P_2 = \frac{P_2}{g} a$$

Donde T es la tensión en la cuerda, la cual va siempre en dirección contraria al bloque respecto al cual estamos realizando la ecuación, y en los dos bloques es la misma tensión ya que es la misma cuerda y en la polea la cuerda circula libremente.

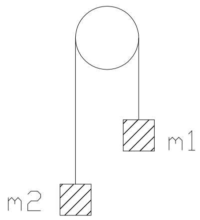
Si sumamos las dos ecuaciones anteriores llegamos a la siguiente ecuación:

$$P_1 - P_2 = \frac{a}{g}(P_1 + P_2) \quad \rightarrow \quad a = \frac{(P_1 - P_2)g}{(P_1 + P_2)} = \frac{5}{15}g = \frac{g}{3} = 3.27\ \mathrm{m/s}$$

Ahora el bloque de 5 N asciende con una aceleración de 3.27 m/s. Esto ocurre así porque ahora la fuerza del bloque (10 N), el peso del bloque, debe mover ambas masas, mientras que en el caso a) sólo se movía la masa del bloque de 5 N.

2.- El sistema más sencillo de poleas se denomina máquina de Atwood y se utiliza para medir la aceleración de la gravedad g a partir de la aceleración de los dos bloques. Suponiendo que la cuerda y la polea tienen una masa despreciable y la polea carece de rozamiento, demostrar que la aceleración de cualquiera de los bloques y la tensión de la cuerda son:

$$\boldsymbol{a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g} \qquad\qquad \boldsymbol{T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g}$$



Para poder demostrar que la aceleración y la tensión son la fórmula que anuncia el problema empezamos aplicando la 2ª ley de Newton a cada bloque por separado (suponemos que $m_2 > m_1$) :

$$m_2 g - T = m_2 a$$
$$T - m_1 g = m_1 a$$

Si sumamos las dos ecuaciones resulta la siguiente ecuación:

$$(m_2 - m_1) g = (m_1 + m_2) a \qquad \rightarrow \qquad a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

Despejando T en la segunda ecuación:

$$T = m_1 g + m_1 a = m_1 (g + a)$$

Y sustituyendo la aceleración por la fórmula que hemos hallado anteriormente:

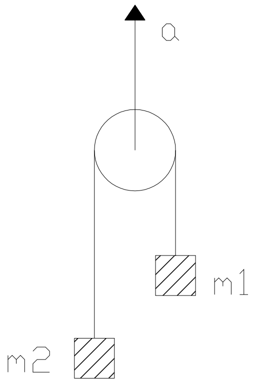
$$m_1 \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \right) + m_1 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \right) g$$

En la segunda parte de la ecuación se ha introducido una fracción que no influye en el resultado pero es útil para poder simplificar y que el resultado sea idéntico al que da el enunciado.

Por lo que el resultado final es:

$$T = \frac{m_1 m_2 g + m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

3.- La polea de una máquina de Atwood experimenta una aceleración *a* hacia arriba. Determinar la aceleración de cada masa y la tensión de la cuerda.



Para poder realizar este problema debemos de hacer una suposición, que el bloque m_1 sube con su aceleración propia (a_{pr}) (relativa a la polea) más la aceleración externa (a), por lo que suponemos que $m_2 > m_1$, esto es, ($a + a_{pr}$) será la aceleración absoluta de m_1.

Supondremos igualmente que el bloque m_2 asciende también pero con una aceleración absoluta ($a - a_{pr}$) ya que m_2 descenderá con respecto a la polea. Es evidente que nuestras suposiciones dependerán de los valores reales de las masas, lo cual podría hacer que al sustituir dichos valores, los resultados numéricos de las aceleraciones fueran negativos.

Si aplicamos la 2ª ley de Newton a cada bloque por separado obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$T - m_2 g = \left(a - a_{pr}\right) m_2$$
$$T - m_1 g = \left(a + a_{pr}\right) m_1$$

(ya que hemos supuesto que ambas masas ascienden, las tensión será mayor que los pesos)

Si restamos la segunda ecuación a la primera obtenemos la siguiente ecuación:

$$(m_1 - m_2)g = m_2 a - m_2 a_{pr} - m_1 a - m_1 a_{pr}$$

Para hallar a_{pr} basta con despejarla de la ecuación anterior, y el resultado es el siguiente:

$$(m_1 - m_2)g - m_2 a + m_1 a = -a_{pr}(m_1 + m_2)$$
$$a_{pr} = \frac{(m_2 - m_1)(g + a)}{m_1 + m_2}$$

Como podemos observar la aceleración relativa de los bloques con respecto a la polea es la misma que en el problema 2 pero con (g + a) en lugar de g.

Teniendo el resultado de a_{pr} podemos hallar la aceleración total de cada bloque.

Para el bloque m_2 obtenemos:

$$a_2 = a - a_{pr} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} a - \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} (a + g)$$

En la primera parte de la ecuación se ha introducido una fracción que no influye en el resultado pero es útil para poder simplificar.

Por lo que el resultado de la aceleración absoluta del bloque m_2 queda así:

$$a_2 = \frac{[2m_1 a + \ (m_1 - m_2)g]}{m_1 + m_2}$$

Para el bloque m_1 obtenemos:

$$a_1 = a + a_{pr} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} a + \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}(a + g)$$

En la primera parte de la ecuación se ha introducido una fracción que no influye en el resultado pero es útil para poder simplificar.

Por lo que el resultado de la aceleración absoluta del bloque m_1 queda así:

$$a_1 = \frac{[2m_2 a + \ (m_2 - m_1)g]}{m_1 + m_2}$$

Para obtener la tensión utilizamos la ecuación que obtuvimos con la 2ª ley de Newton aplicada para el bloque m_2:

$$T - m_2 g = (a - a_{pr})m_2$$

$$T = m_2 g + a_2 m_2 = m_2 g + \frac{[2m_1 a + \ (m_1 - m_2)g]}{m_1 + m_2} m_2$$

Una vez obtenido esta ecuación sólo que simplificar, por lo que el resultado de la tensión sería el siguiente:

$$T = m_2 \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} g + \frac{2m_1 m_2 a}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2 g - {m_2}^2 g}{m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g + a)$$

Podemos observar que esta tensión también coincide con la del problema 2 pero cambiando (g + *a*) en vez de g.

4.- De una polea cuelga una cuerda sin rozamiento; en uno de los lados hay un mono, y en el otro una pesa exactamente igual al peso de dicho animal. Se desea saber lo que ocurre si aquel decide trepar.

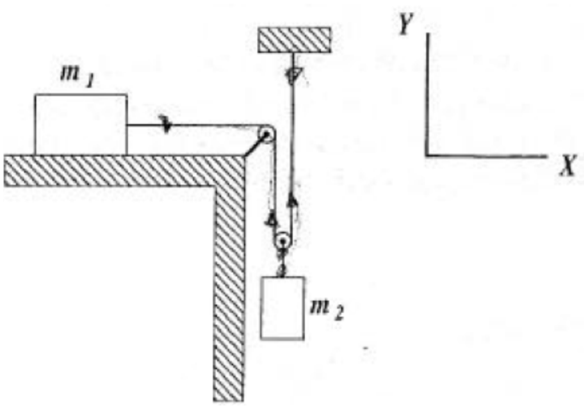
Se pueden pensar dos cosas, que el mono suba normal y la pesa se quede quieta, o que el mono se que en el mismo sitio y sea la pesa la que suba. Ninguna de estas dos situaciones ocurre.

En realidad, la fuerza extra que el mono ejercerá para trepar elevará tanto a la pesa como a él mismo, de modo que ambos se elevan a la vez. Lo que pasa es que si el mono recorre una distancia "*d*" sobre la cuerda, él solo se elevará $d/2$, debido a que los otros $d/2$ los ha subido el peso permaneciendo mono y peso siempre enfrentados.

Si en lugar de la pesa hubiera otro mono del mismo peso y ambos se pusieran a trepar a la vez, ahora sí subirían a la velocidad a la que trepan debido a que la cuerda no se movería.

Adaptado de la cuestión 6.24 del libro ¿Por qué? 1700 Cuestiones de Física de F. Senent y J. Aguilar.

5.- En el sistema representado en la figura, dos bloques de masas m_1 = 10 kg y m_2 = 6 kg están unidos por un cable inextensible de masa despreciable. Las poleas se suponen lisas y sin peso. Se pide determinar la aceleración que adquiere cada uno de los cuerpos y las tensiones de las cuerdas.



Los sistemas de puntos materiales conectados por ciertos vínculos o ligaduras se llaman sistemas holónomos (condición de rigidez). En este caso, la ligadura es la longitud constante del cable. Los sistemas holónomos pueden tener uno (como en este caso) o más grados de libertad.

La longitud de cable es,

$$L = x_1 + 2x_2 + b \rightarrow (Donde\ el\ b\ es\ una\ constante)$$

Y si derivamos dos veces con respecto al tiempo e igualamos a cero

$$\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 = 0 \ \rightarrow \ \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = 0$$

(donde la notación con el punto significa derivada respecto del tiempo)

Según esta ecuación, cuando el bloque m_1 se mueva y se desplace hacia la derecha con una aceleración "a", el bloque m_2 desciende con una aceleración "$\frac{a}{2}$". Por tanto:

$$a_2 = \frac{a_1}{2}$$

Como norma general podemos afirmar que cuando un cuerpo está en una polea móvil su aceleración será la mitad.

Si aplicamos la 2ª Ley de Newton al bloque m_1 que sólo está sometido a la tensión T_1 de la cuerda:

$$T_1 = m_1 \cdot a_1 \qquad [1]$$

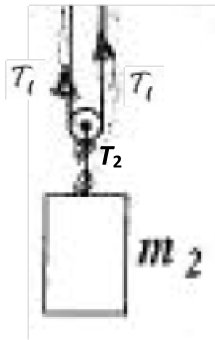
Para el bloque m_2 obtendríamos:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \qquad [2]$$

Si despejamos T_2:

$$T_2 = m_2\left(g - \frac{a_1}{2}\right) \ donde\ hemos\ sustituido \ \rightarrow \ a_2 = \frac{a_1}{2}$$

Ahora, según el diagrama, para la **polea móvil** inferior de peso despreciable, se cumple:



$$2T_1 = T_2 \qquad [3]$$

Entonces ahora, con las ecuaciones obtenidas [1] y [2] podemos sustituir en la ecuación [3],

$$2m_1a_1 = m_2g - \frac{1}{2}m_2a_1$$

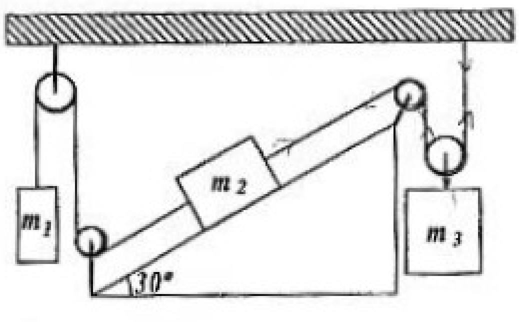
Y si despejamos a_1 podemos obtener la aceleración,

$$a_1 = \frac{m_2g}{2m_1 + \frac{m_2}{2}} = \frac{6 \cdot 9{,}8}{2 \cdot 10 + \frac{6}{2}} = 2{,}56\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$$

Entonces podemos afirmar, con el resultado de a_1 y sustituyendo en nuestras ecuaciones [1] y [2] que,

$a_2 \approx 1{,}3\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ $\qquad T_1 = 25{,}6\ \mathrm{N}$ $\qquad T_2 = 51{,}1\ \mathrm{N}$

6.- En el sistema de la figura, las masas de los bloques son m_1 = 8 kg, m_2 = 12 kg y m_3 = 20 kg. La cuerda que los une se supone inextensible y de masa despreciable y las poleas se consideran lisas y sin peso. El coeficiente de rozamiento dinámico entre el bloque y la superficie del plano inclinado es μ = 0,15. Se pide determinar la aceleración de los bloques y las tensiones de las cuerdas.



Podemos comprobar por el dibujo que:

$$a_1 = a_2 = 2a_3$$

donde la aceleración de m_3 es la mitad porque está en una polea móvil (ver problema anterior)

Aplicamos la 2ª Ley de Newton a cada bloque suponiendo que m_1 desciende*:

[1] $m_1 g - T_1 = m_1 a_1$

[2] $T_1 + m_2 g\ sen30° - T_2 - F_R = m_2 a_2$

[3] $T_3 - m_3 g = m_3 a_3$

$F_R = \mu \cdot m_2 g\ cos30°$

Igual que en el problema anterior, para la polea móvil se cumple la relación de tensiones:

$$2T_2 = T_3$$

Entonces, con esta relación y sustituyendo las aceleraciones obtenidas obtenemos,

$$2(-m_2 \cdot 2a_3 + m_2 g \cdot sen30° - F_R - m_1 2a_3 + m_1 g) = m_3 g + m_3 a_3$$

Si despejamos a_3 obtendríamos,

$$a_3 = \frac{-m_3 g + 2m_2 g \cdot sen30° - 2\mu m_2 g \cdot cos30° + 2m_1 g}{4(m_1 + m_2) + m_3} = 0{,}45\ \mathrm{m}/_{\mathrm{s}^2}$$

Con este resultado y sustituyendo en las ecuaciones anteriores podemos obtener,

$$a_1 = a_2 = 0{,}9\ \mathrm{m}/_{\mathrm{s}^2} \qquad T_1 = 71{,}2\ \mathrm{N}$$

$$T_2 = 102{,}7\ \mathrm{N} \qquad T_3 = 205{,}4\ \mathrm{N}$$

**Nota: El hecho de presuponer que m_1 desciende se puede deducir comparando las fuerzas que hacen que el sistema se mueva hacia la izquierda y hacia la derecha. Hacia la izquierda actúan: el peso de m_1 (8g = 78.4* N*) y la componente del peso de m_2 en dirección del plano (12gsen30 = 58.8* N*). Esto es, 78.4 + 58.8 = 137.2* N*. Hacia la derecha actúa sólo la mitad del peso de m_3 ya que éste está sobre la polea móvil, $m_3g/2$ = 98* N*. Como 137.2* N *> 98* N*, el balance neto hace que el sistema se mueva hacia la izquierda, esto es, m_1 descienda.*

Intentar evaluar previamente el sentido del movimiento en los problemas con rozamiento es importante ya que, debido al rozamiento, las ecuaciones de Newton no se pueden invertir en signo si se elige un sentido erróneo.

7.-Un bloque de 60 kg se desliza por la parte superior de otro bloque de 100 kg con una aceleración de 3 m/s^2 por la acción de una fuerza horizontal F de 320 N. El bloque de 100 kg se apoya sobre una superficie horizontal sin rozamiento, pero hay rozamiento entre los dos bloques.

a) Determinar el coeficiente de rozamiento cinético entro los bloques.

b) Determinar la aceleración del bloque de 100 kg durante el tiempo que el bloque de 60 kg mantiene el contacto.

a) El bloque superior se encuentra sometido a la fuerza F y a la fuerza de rozamiento con el bloque inferior. Por tanto, la 2ª Ley de Newton aplicada al bloque superior será:

$$F - \mu_c N = 60\, a_{sup} \;\rightarrow\; 320 - \mu_c 60g = 60 \cdot 3$$

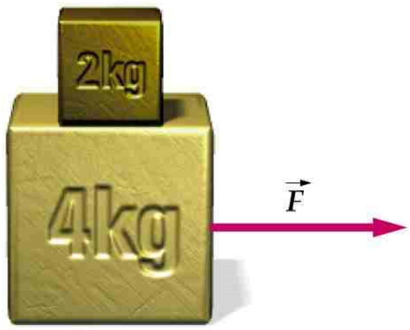
Ahora, despejando el rozamiento:

$$\mu_c = 0{,}24$$

b) El bloque inferior sólo se encuentra sometido al rozamiento con el bloque superior que es la única fuerza en dirección del movimiento que actúa sobre él. Si aplicamos la 2ª Ley de Newton al bloque inferior:

$$\mu_c 60g = 100 \cdot a_{inf} \;\rightarrow\; a_{inf} = 1{,}41\, {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}^2}$$

8. Un bloque de 2 kg está situado sobre otro de 4 kg, que a su vez se apoya sobre una mesa sin rozamiento. Los coeficientes de rozamiento entre los dos bloques son $\boldsymbol{\mu_e = 0,3\ y\ \mu_c = 0,2}$.



a) ¿Cuál es la fuerza máxima F que puede aplicarse al bloque de 4 kg de tal modo que el bloque de 2 kg no deslice?

b) Si F es la mitad de ese valor máximo, determinar la aceleración de cada bloque y la fuerza de rozamiento que actúa sobre cada uno de ellos.

c) Si F es el doble del valor determinado en a), calcular la aceleración de cada bloque.

a) Si los dos cuerpos están unidos es como si tuviéramos un solo bloque de masa $(m_1 + m_2)$.

Luego $F = (m_1 + m_2) \cdot a = (2 + 4) \cdot a$

Vemos que el bloque superior se mantiene fijo al inferior por la fuerza de rozamiento estática que es quien le proporciona la aceleración "a" y la única fuerza que actúa sobre él (en dirección del movimiento). Luego si aplicamos la 2ª ley de Newton al bloque superior, tenemos:

$$F_R = 2 \cdot a \quad \rightarrow \quad 2 \cdot g \cdot 0{,}3 = 2 \cdot \frac{F}{2+4} \quad \rightarrow \quad F = 17{,}64 \text{ N}$$

Otra forma de entender el problema es mediante el concepto de fuerza ficticia o de inercia. Así, cuando el conjunto de ambos bloques se acelera hacia adelante con aceleración "a", entonces el bloque superior va a sentir una reacción o fuerza ficticia (fuerza de inercia) hacia atrás del valor $m_1 a$. Entonces, el problema será una situación de equilibrio estático entre $m_1 a$ (hacia atrás) y el rozamiento $\mu_e m_1 g$ (hacia delante):

$$\mu_e m_1 g = m_1 a$$

Como, $a = \frac{F}{m_1 + m_2}$ $\quad$ *entonces* $\quad \mu_e m_1 g = m_1 \frac{F}{m_1 + m_2}$ y obtendríamos el mismo valor de F que antes.

b) Si $F' = \frac{17{,}54}{2} = 8{,}77$ N como 8,77 N < 17.64 N sabemos que los dos bloques se van a mover juntos.

con $a' = \frac{F'}{m_1 + m_2} = 1{,}47 \text{ m/s}^2$. La fuerza de rozamiento es simplemente la que mueve al bloque superior, esto es, le proporciona la aceleración de 1,47 m/s²:

$$m_1 \cdot a' = 2{,}74 \text{ N}$$

(ojo, esta fuerza de rozamiento no es la máxima posible ($\mu_c m_1 g = 5{,}88$ N) sino sólo la que se necesita para proporcionar la aceleración necesaria de 1,47 m/s² al bloque superior).

c) Si F'' = 17,54 x 2 = 35,28 N, la 2ª Ley para aplicada al bloque interior es:

$$F'' - 2 \cdot 0{,}2 \cdot g = 4 \cdot a_{inf}''$$

de donde:

$$a_{inf}'' = 7{,}85\ m/s^2$$

Se ha utilizado el coef. de rozamiento cinético puesto que ahora sabemos que ambos bloques van a deslizar.

Puesto que el rozamiento cinético es la única fuerza externa (en dirección del movimiento) que actúa sobre el bloque superior, al aplicarle 2ª ley de Newton tendríamos:

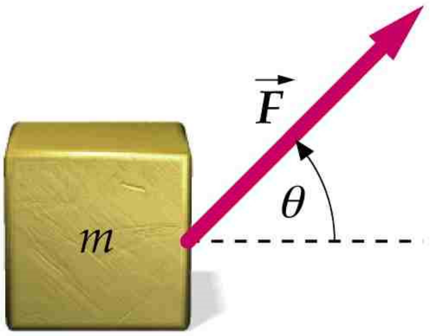
$$2g \cdot 0{,}2 = 2 \cdot a_{sup}''$$

$a_{sup}'' = 1{,}96\ \mathrm{m/s^2}$ respecto al suelo. Esta aceleración de 1,96 m/s^2 es independientemente de la fuerza F'' aplicada siempre que se cumpla que $F > 17{,}54$ N

9.- Un bloque de masa m descansa sobre una mesa horizontal. El coeficiente de rozamiento estático es μ_e. Se aplica una fuerza al cuerpo bajo un ángulo θ.

a) Determinar la fuerza F necesaria para desplazar el bloque en función del ángulo θ.

b) Para el ángulo θ en que esta fuerza es mínima, la pendiente dF/d θ de la curva F en función de θ es cero. Calcular dF/d θ y demostrar que esta derivada es cero para el ángulo θ que satisface la expresión tg θ = μ_e.



a) Si el bloque no se mueve ($a = 0$), al aplicar la 2ª ley de Newton tendremos que el sumatorio de las fuerzas es nulo, quedando:

$\sum Fy = 0 \Longrightarrow \qquad mg - N - \mu\, Fsen\theta \Longrightarrow 0 \qquad N = mg - Fsen\theta$

donde N es la fuerza neta que el suelo hace sobre el bloque (o fuerza normal).

$\sum Fx = 0 \Longrightarrow \qquad Fcos\theta - F_R = 0$ (donde la $F_R = \mu_e N$)$\Longrightarrow$

$$Fcos\theta = \mu_e(mg - Fsen\theta) \Longrightarrow \qquad F = \frac{\mu_e \cdot m \cdot g}{cos\theta + \mu_e \cdot sen\theta}$$

(ver que $Fcos\theta$ tira hacia la derecha y $\mu_e(mg - Fsen\theta)$ tira hacia la izquierda)

b) F es mínima cuando el denominador es máximo:

$$\frac{d(cos\theta + \mu_e \cdot sen\theta)}{d\theta} = -sen\theta + \mu_e\, cos\theta = 0 \quad \text{(si es un extremo)}$$

Ahora despejamos θ:

$\mu_e = tg\theta \Longrightarrow \qquad \theta = arctg \cdot \mu_e$

Esta es una expresión muy conocida que relaciona el coef. de rozamiento estático con el ángulo en muchos problemas de estática (por ejemplo, como ocurre con cuerpos que reposan sin deslizar sobre un plano inclinado).

10.- Considerar una cuenta de masa m que puede moverse libremente sobre un alambre delgado y circular de radio r. Se da a la cuenta una velocidad inicial v_0 y el coeficiente de rozamiento cinético es μ_c. El experimento se realiza en ausencia de gravedad.

a) Determinar la velocidad de la cuenta en cualquier tiempo t posterior.

b) Determinar la aceleración centrípeta de la cuenta.

c) Hallar la aceleración tangencial de la cuenta.

d) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración resultante?

a) Pensando el problema a nivel de fuerzas de inercia (fuerzas centrífugas), cuando la masa gira sufre una fuerza de inercia hacia el exterior ($m \cdot \frac{v^2}{r}$) que con el coeficiente de rozamiento (μ_c) nos dará una fuerza de rozamiento, la cual disminuirá la velocidad creando una aceleración tangencial $\mu_c \cdot \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot a_t$ despejamos la velocidad y nos queda: $v^2 = \frac{a_t \cdot r}{\mu_c}$

En este caso, la aceleración es función de la velocidad y utilizaremos la correspondiente ecuación de cinemática (ojo, no se pueden utilizar las ecuaciones de MRUA):

$$t = \int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{-a_t(v)} = \frac{r}{\mu_c} \int_{v_0}^{v} -\frac{dv}{v^2} = \frac{r}{\mu_c} \left[\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v} = \frac{r}{\mu_c} \left[\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right]$$

Ahora, despejamos la velocidad:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{\mu_c \cdot t}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v} = \frac{r + v_0 \cdot \mu_c \cdot t}{v_0 \cdot r} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{v_0 \cdot r}{v_0 \cdot \mu_c \cdot t + r} = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 \cdot \mu_c \cdot t}{r}}$$

b) la aceleración centrípeta o normal es:

$$\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad a_c = \frac{v_0^2}{r} \left[\frac{1}{1 + \frac{\mu_c v_0 t}{r}} \right]^2$$

c) en el apartado a) hemos visto que la aceleración tangencial cumplía:

$\mu_c \cdot \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot a_t$ entonces: $a_t = -\mu_c \cdot a_c$ (siendo el signo negativo debido a que se trata de una desaceleración). Esto es, la aceleración tangencial de frenado depende de la aceleración centrífuga (es decir, de la velocidad).

También podríamos haber deducido la aceleración tangencial derivando la expresión de la velocidad obtenida en el apartado a). Mediante la aplicación de la regla de la cadena de la derivación, obtenemos:

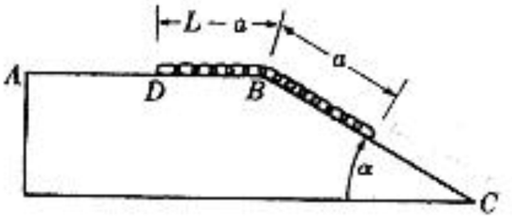
$$a_t = \frac{dv}{dt} = -\frac{{v_0}^2 \cdot \mu_c}{r} [\frac{1}{1 + \frac{\mu_c \cdot v_0 \cdot t}{r}}]^2 = -\mu_c \cdot a_c$$

d) la magnitud de la aceleración resultante es:

$$a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_c}^2} = a_c(1 + {\mu_c}^2)^{1/2}$$

11.- Una cadena flexible de longitud L y peso W está colocada inicialmente en reposo, sobre una superficie sin fricción ABC, estando D a una distancia (L−a) de B. Demostrar que cuando el extremo D llega al punto B la velocidad de la cadena es:

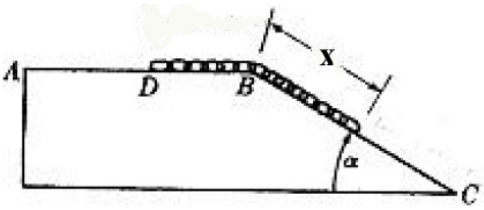
$$v = \sqrt{(g/L)(L^2 - a^2\ ) \cdot sen\alpha}$$



-

Primeramente, definimos una densidad lineal de peso $\lambda = \frac{W}{L}$

En cualquier instante tenemos que tener en cuenta que habrá una distancia x de cadena más allá de B que variará desde a (en el instante inicial) hasta L (en el instante final).



Esta distancia x ejercerá una fuerza $\frac{W}{L}x\ sen\alpha$ que es la componente del peso de la cadena en dirección paralela al plano. Esta es la fuerza que acelerará toda la cadena completa de masa total $\frac{W}{g}$. Por lo tanto, al aplicar la 2ª ley de Newton a toda la cadena, tendremos que la fuerza aplicada a la cadena deberá ser igual a la masa total por la aceleración. Esto es:

$$\frac{W}{L}x\ sen\alpha = \frac{W}{g}\ a$$

Siendo $\frac{W}{L}x$ el peso de la cadena que cuelga y $\frac{W}{g}$ su masa total.

Despejamos la aceleración y nos queda: $a = \frac{g}{L}x\ sen\alpha$

Entonces la aceleración es función del desplazamiento x y entonces usamos la correspondiente ecuación cinemática que nos interesa:

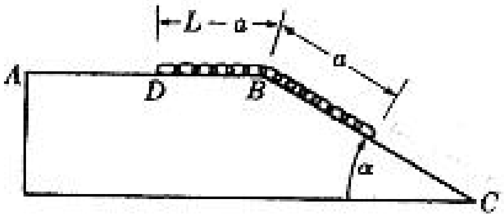
$$v^2 = {v_0}^2 + 2\int_a^L \frac{g}{L}x\ sen\alpha\ dx = \frac{2g}{L}\left(\frac{L^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)\ sen\alpha$$

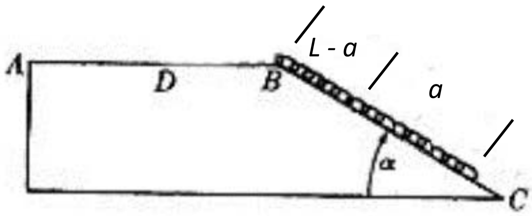
Donde se ha tomado v_0 = 0, ya que la cadena parte del reposo.

Finalmente: $v = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - a^2)\ sen\alpha}$ como queríamos demostrar.

Este problema también se puede resolver aplicando la conservación de la energía.

POR ENERGÍAS





Sea Δh_1 lo que desciende el CM del trozo de cuerda $(L – a)$ desde la situación inicial a la final:
$\Delta h_1 = (L – a)\ sen\alpha / 2$

Sea Δh_2 lo que desciende el CM del trozo de cuerda (a) desde la situación inicial a la final:
$\Delta h_2 = (L – a)\ sen\alpha$

La masa m_1 del trozo de cuerda $(L – a)$ es igual a la densidad lineal de masa de la cuerda (W/gL) multiplicado por la longitud $(L – a)$, esto es: $[(W/gL) \cdot (L – a)]$
Luego el cambio de energía potencial de ese trozo será:
$m_1 \cdot g \cdot \Delta h_1 = [(W/L) \cdot (L – a)] \cdot ((L – a)\ sen\alpha / 2)$

La masa m_2 del trozo de cuerda (a) es igual a la densidad lineal de masa de la cuerda (W/gL) multiplicado por la longitud (a), esto es: $[(W/gL) \cdot (a)]$
Luego el cambio de energía potencial de ese trozo será:
$m_2 \cdot g \cdot \Delta h_2 = [(W/L) \cdot (a)] \cdot (L – a)\ sen\alpha$

Por tanto, el cambio total en energía potencial desde la situación inicial a la final será la suma de ambas contribuciones anteriores. Dicho cambio será igual al cambio en energía cinética de la cuerda, esto es:
$m_1 \cdot g \cdot \Delta h_1 + m_2 \cdot g \cdot \Delta h_2 = (1/2)\ (W/g)\ v^2$

Luego:
$[(W/L) \cdot (L – a)] \cdot ((L – a)\ sen\alpha / 2) + [(W/L) \cdot (a)] \cdot (L – a)\ sen\alpha = (1/2)\ (W/g)\ v^2$

Dividimos ambos miembros entre W. En el primer miembro, sacamos factor común
$(sen\alpha / L)\ (L – a)$. Resulta:

$(sen\alpha / L)\ (L – a) \cdot [(L – a)/2 + 2a/2] = (sen\alpha / L)\ (L – a)\ (L + a)/2 =$

$= (sen\alpha / 2L)\ (L^2 - a^2) = (1/2)\ 1/g)\ v^2$

O bien:
$v^2 = (g / L)\ (L^2 - a^2)\ sen\alpha$

$$v = \sqrt{(g/L)(L^2 - a^2\ ) \cdot sen\alpha}$$

Que es el mismo resultado obtenido por la aplicación de la 2ª ley de Newton.

12.- Un estudiante montado en una bicicleta sobre una superficie horizontal, recorre un círculo de radio 20 m. La fuerza resultante ejercida sobre la bicicleta (fuerza normal más la fuerza de rozamiento) forma un ángulo de 15° con la vertical:
a) ¿cuál es la velocidad del estudiante?
b) Si la fuerza de rozamiento es la mitad de su valor máximo, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento estático?

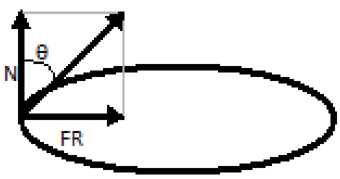
a) Si aplicamos la 2ª ley de Newton a la masa estudiante-bicicleta, vemos que:

$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad mg - N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$

$\sum F_x = ma_n \quad \Rightarrow \quad F_R = m\frac{v^2}{r}$ donde F_R es la fuerza de rozamiento y a_n es la aceleración normal o centrípeta.

Esto quiere decir que F_R crea la aceleración centrípeta (sin F_R no se podría dar la curva).

Ahora:



$\theta = 15°$

Sacamos la velocidad:

$$tan\,15 = \frac{m\frac{v^2}{r}}{mg} \quad \Longrightarrow \quad tan15 = \frac{v^2}{rg}$$ tenemos que: $v = 7{,}25\ \text{m/s}$

b) Hemos visto que $F_R = m\frac{v^2}{r}$ y, según nos dicen en el apartado b), la fuerza de rozamiento que actúa (la fuerza centrípeta) es la mitad de la máxima posible $\mu_e mg$:

$$2F_R = F_{Rmax} \quad \Rightarrow \quad 2\,m\frac{v^2}{r} = \mu_e \cdot mg \quad \Rightarrow \quad \mu_e = \frac{2v^2}{r \cdot g} = 0{,}536$$

Gracias a que F_R (que es la fuerza centrípeta) y F_{Rmax} son proporcionales a la masa del móvil, este factor se cancela y podemos hallar el coeficiente de rozamiento estático μ_e.

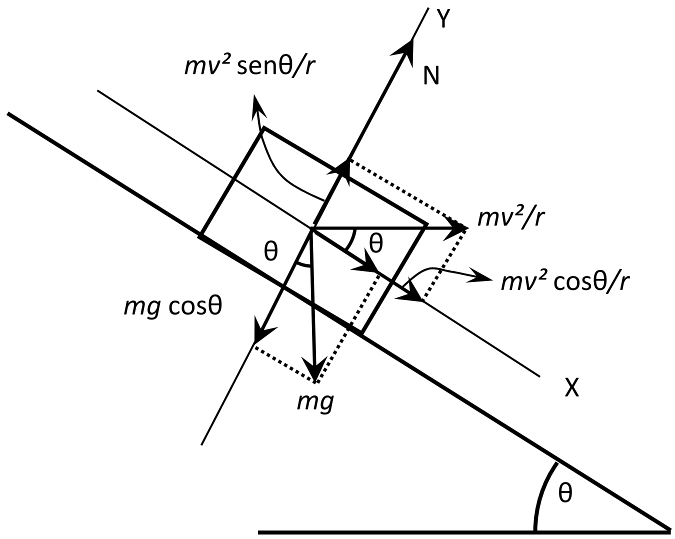
Para dicho valor del coef. de rozamiento estático, es interesante calcular cuál sería la velocidad máxima a la que se puede dar el círculo y con qué inclinación.

13.- Un ingeniero de caminos recibe la siguiente consulta. Hay que diseñar una sección curva de carretera que cumpla las siguientes condiciones: Con hielo sobre la carretera, cuando el coeficiente de rozamiento estático entre la carretera y el caucho es de 0,08, un coche en reposo no debe deslizar hacia la cuneta y un coche que circule a una velocidad inferior de 60 *km/h* no debe deslizarse hacia el exterior de la curva. ¿Cuál debe ser el radio mínimo de la curva y el ángulo de peralte de la carretera?

Para la condición de no deslizamiento en reposo debemos igualar la componente de peso paralela al plano (dirigida hacia abajo) con la fuerza de rozamiento (dirigida hacia arriba).

Entonces, tenemos que:

$mg\ sen\theta = \mu_e\ mg\ cos\theta \quad \Rightarrow \quad \mu_e = tan\theta \quad \Rightarrow \quad 0{,}08 = tan\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = 4{,}57°$



Por la condición en movimiento aplicamos la 2ª Ley de Newton, siguiendo el esquema y con los ejes X e Y elegidos:

$\sum F_Y = ma_Y \quad \Rightarrow \qquad N - mg\ cos\theta = m\frac{v^2}{r}\ sen\theta$

$\sum F_X = ma_X \quad \Rightarrow \qquad mg\ sen\theta\ +\ \mu_e\ N\ = m\frac{v^2}{r}\ cos\theta$

Se ha tomado que la fuerza de rozamiento $\mu_e\ N$ apunta hacia abajo (como $mg\ sen\theta$) ya que no queremos que el cuerpo deslice hacia arriba (cuneta).

Resolviendo el sistema:

$m\frac{v^2}{r}\ cos\theta - mg\ sen\theta = \mu_e\ (mg\ cos\theta + m\frac{v^2}{r}\ sen\theta) \qquad$ [a]

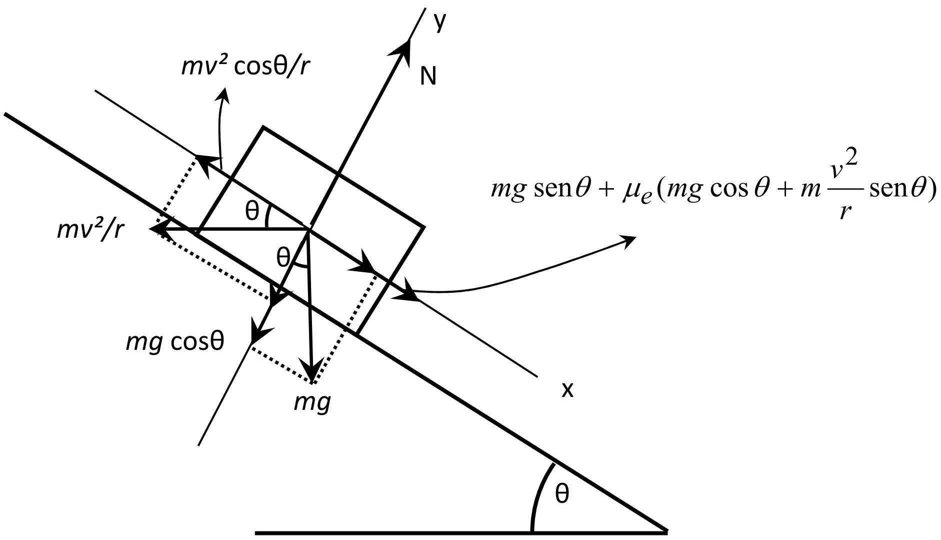
$\frac{v^2}{r}\ (cos\theta - \mu_e\ sen\theta) = g(sen\theta + \mu_e\ cos\theta)$

$$\frac{v^2(cos\theta - \mu_e sen\theta)}{g(sen\theta + \mu_e cos\theta)} = r = 176 \text{ m}$$

Puede resultar más sencillo o intuitivo interpretar el problema desde el punto de vista de fuerzas de inercia (en este caso centrífugas). Supondremos que la fuerza centrífuga es una fuerza real aplicada sobre el cuerpo y resolveremos el problema de equilibrio estático correspondiente. Para ello, igualaremos las fuerzas que "tiran" del cuerpo hacia arriba [$m\frac{v^2}{r}\ cos\theta$] con las fuerzas que "tiran" hacia abajo [$mg\ sen\theta$ + $\mu_e\cdot(mg\ cos\theta + m\frac{v^2}{r}sen\theta)$]. Esto es:

$$m\frac{v^2}{r}\ cos\theta = mg\ sen\theta + \mu_e(mg\ cos\theta + m\frac{v^2}{r}sen\theta)$$

que es la misma ecuación [a] que obtuvimos antes.



14.-Determinar la fuerza constante que es necesaria aplicar durante 0,005 s a una pelota de golf de 0,01 kg de masa, inicialmente en reposo, para que deje el suelo a una velocidad de 40 *m/s*.

Como:

$$F = ma \implies F = m\frac{dv}{dt} \implies \int_{t_1}^{t_2} F\,dt = \int_{v_1}^{v_2} m\,dv = mv_2 - mv_1$$

Esto nos dice que la variación del impulso coincide con la variación del momento lineal. En nuestro caso, nos dicen que la fuerza aplicada es constante y, como $v_1 = 0$, tendremos:

$$F(t_2 - t_1) = mv_2 - mv_1 = mv_2$$

$$F = \frac{mv_2}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}01 \cdot 40}{0{,}05} = 80 \text{ N}$$

15.- Para t = 0, un cuerpo de masa de 3,0 kg está en $\vec{r} = 4\vec{u}_x$ m y tiene una velocidad $\vec{v} = (\vec{u}_x + 6\vec{u}_y)$ m/s. Si actúa sobre la partícula una fuerza constante $\vec{F} = 5\vec{u}_y$ N, encontrar:

a) el cambio en el momento lineal del cuerpo después de 3 s.

b) el cambio en el momento angular del cuerpo después de 3 *s.*

a) Puesto que sabemos:

$$\int_{t1}^{t2} \vec{F}\, dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

y como $\vec{F}$ es constante:

$$\vec{F}\,\Delta t = \Delta\vec{p} \;\rightarrow\; \boldsymbol{\Delta\vec{p}} = 5\vec{u}_y \cdot 3 = 15\vec{u}_y \;\; Ns = \mathbf{15\ kg\ m/s}$$

$$\Delta t = 3s \begin{cases} t_{1=0} \\ t_{2=0} \end{cases}$$

También podíamos haber calculado $\vec{v}_2$ como:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{a}t \qquad \text{donde} \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{5}{3}\,\vec{u}_y \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_2 = (\vec{u}_x + 6\vec{u}_y) + \frac{5}{3}3\,\vec{u}_y = \vec{u}_x + 11\vec{u}_y \text{ m/s}$$

Ahora, restando directamente los momentos lineales:

$$m\vec{v}_1 = 3 \cdot (\vec{u}_x + 6\vec{u}_y) = 3\vec{u}_x + 18\vec{u}_y \text{ kg m/s}$$

$$m\vec{v}_2 = 3 \cdot (\vec{u}_x + 11\vec{u}_y) = 3\vec{u}_x + 33\vec{u}_y \text{ kg m/s}$$

$$\boldsymbol{\Delta\vec{p}} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \mathbf{15\ kg\ m/s}$$

y hemos obtenido el mismo resultado que antes.

b) Para hallar el cambio en $\vec{L}$, hallamos primero

$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 = 4\vec{u}_x \times 3(\vec{u}_x + 6\vec{u}_y) = 72\vec{u}_k$ kg m²/s

Para hallar $\vec{L}_2$ necesitamos antes $\vec{r}_2$: Para t = 3 segundos.

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = 4\vec{u}_x + (\vec{u}_x + 6\vec{u}_y)3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5\vec{u}_y}{3} \cdot 3^2 = 7\vec{u}_x + \frac{51}{2}\vec{u}_y$$

Y ahora:

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \overrightarrow{u_k} \\ 7 & \frac{51}{2} & 0 \\ 3 & 33 & 0 \end{vmatrix} = (231 - 76{,}5)\vec{u}_k = 154{,}5\ \vec{u}_k\ \mathrm{kg\ m^2/s}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{\Delta\vec{L}} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = (154{,}5 - 72)\vec{u}_k = \mathbf{82{,}5\ \vec{u}_k\ kg\ m^2/s}$$

Podemos comprobar el resultado si observamos que como:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \rightarrow \int_0^3 \vec{\tau}\ dt = \Delta\vec{L}$$

donde, el momento de fuerza viene dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Por cinemática, sabemos:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = 4\vec{u}_x + (\vec{u}_x + 6\vec{u}_y)t + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}t^2\vec{u}_y =$$

$$= (4 + t)\vec{u}_x + t\left(6 + \frac{5}{6}t\right)\vec{u}_y$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_k \\ 4 + t & t(6 + \frac{5}{6}t) & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 5(4 + t)\vec{u}_k$$

Queda, al integrar el momento de fuerza:

$$\boldsymbol{\Delta\vec{L}} = \int_0^3 \vec{\tau}\ dt = 5(4t + \frac{t^2}{2})\Big]_0^3 = 60 + 22{,}5 = \mathbf{82{,}5\vec{u}_k\ \ kg\ m^2/s}$$

que es igual que antes.

16.- El vector posición de un cuerpo de masa 6 kg está dado por:

$$\vec{\mathbf{r}} = (\mathbf{3t^2 - 6t})\overrightarrow{\mathbf{u_x}} + (\mathbf{-4t^3})\overrightarrow{\mathbf{u_y}} + (\mathbf{3t + 2})\overrightarrow{\mathbf{u_z}}\,\boldsymbol{m}.$$

Encontrar:

a) La fuerza que actúa sobre la partícula.

b) El torque con respecto al origen de la fuerza que actúa sobre la partícula.

c) El momento lineal y el momento angular de la partícula con respecto al origen.

d) Verificar que $\vec{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{d\vec{p}}}{\mathbf{dt}}$ y $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\mathbf{d\vec{L}}}{\mathbf{dt}}$

a) Debemos hallar: $\vec{F} = m\vec{a}$ donde $\vec{a} = \frac{\vec{d}r^2}{dt^2}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6t - 6)\vec{u}_x - 12t^2\,\vec{u}_y + 3\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\vec{u}_x - 24t\,\vec{u}_y \;\rightarrow\; \vec{F} = m\vec{a} = 36\vec{u}_x - 144t\,\vec{u}_y$$

b) $$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ (3t^2 - 6t) & -4t^3 & (3t+2) \\ 36 & -144t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (432t^2 + 288t)\vec{u}_x + (108t + 72)\vec{u}_y + (-288t^3 + 864t^2)\vec{u}_z \text{ Nm}$$

c) La fórmula del momento lineal es la siguiente:

$$\vec{p} = m\vec{v} = 6\left[(6t - 6)\vec{u}_x - 12t^2\vec{u}_y + 3\vec{u}_z\right] =$$
$$= (36t - 36)\vec{u}_x + (-72)t^2\vec{u}_y + 18\vec{u}_z \text{ kg m/s}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ (3t^2 - 6t) & -4t^3 & (3t+2) \\ (36t - 36) & -72t^2 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$= (144t^3 + 144t^2)\vec{u}_x + (54t^2 + 72t - 72)\vec{u}_y + (-72t^4 + 288t^3)\vec{u}_z \quad \text{kg m}^2/\text{s}$$

d) Es inmediato comprobar derivando que se cumple:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

y que también se cumple:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$