Tema 2 Dinámica de una partícula

2.1. 1ª Ley de Newton y sistemas de referencia inerciales.

Dentro de la Dinámica, así como la Cinemática estudia el movimiento sin prestar atención a sus causas, la Dinámica y, concretamente, la Cinética estudia las causas del movimiento.

2.1.1. Ley de inercia.

Sir Isaac Newton (1642-1727).

La 1ª ley de Newton afirma que una partícula libre o está en reposo o se mueve con velocidad constante en línea recta, es decir, sin aceleración.

Partícula libre significa que no interactúa con nada y estaría aislada (por lo menos no del observador, pero éste no puede influir demasiado)

La 1ª ley se denomina Ley de Inercia.

2.1.2. Sistemas inerciales.

Si suponemos que el observador está también aislado entonces su sistema de referencia se llama sistema de referencia inercial. Todo sistema de referencia inercial o está en reposo o se traslada a velocidad constante en línea recta (sin aceleración), es decir, todo sistema de referencia inercial cumple la 1ª ley de Newton. Un sistema de referencia inercial tampoco puede rotar ya que aparecerían aceleraciones.

Debido a su baja velocidad de rotación que produce aceleraciones mucho menor que la gravedad, la Tierra puede ser considerada un sistema de referencia inercial. La Tierra tiene también una velocidad de traslación alrededor del Sol pero es una velocidad constante de modo que no aparecen aceleraciones comparables a la propia atracción gravitacional. En realidad, estrictamente hablando cualquier sistema dentro del Universo se mueve y puede rotar de modo que no existe un sistema totalmente inercial (tal vez, el propio Universo…)

2.2. Momento lineal y masa inercial.

2.2.1. Definición de momento lineal.

Puesto que hemos definido estáticamente la unidad de masa comparándola con un patrón, se puede definir el momento lineal como el producto de su masa por su velocidad.

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad [1]$$

El momento lineal es un vector y a su módulo se le denomina cantidad de movimiento.

2.2.2. Características para una partícula libre.

Otra forma de enunciar la 1ª ley de Newton una vez definido el momento lineal es la siguiente: Una partícula libre siempre se mueve con momento lineal constante.

Supongamos dos partículas aisladas pero sujetas sólo a su propia interacción. En realidad, existen 4 tipos de interacciones posibles (electromagnética, nuclear fuerte, nuclear débil y gravitatoria) pero para estas dos partículas el tipo de interacción mutua es irrelevante.

La partícula 1 tiene masa m_1 y velocidad $\vec{v}_1$, y la partícula 2 tiene masa m_2 y velocidad $\vec{v}_2$ ambas en el mismo instante de tiempo *t*. De este modo, el momento lineal total de ambas partículas es: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

Después en el instante *t'*, una vez que las partículas han interaccionado, el momento lineal total habrá evolucionado a: $\vec{P}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$

Si las partículas, como hemos dicho, sólo están sujetas a su propia interacción. Se cumplirá:

$$\vec{P} = \vec{P}' \qquad [2]$$

Este resultado se puede extender a un sistema de varias partículas como veremos en el capítulo 4 afirmando que el momento lineal de un sistema de partículas aislado es constante.

Reordenando en [2], tenemos: $\vec{p}_1' - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_2' = -\left(\vec{p}_2' - \vec{p}_2\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \qquad \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \qquad [3]$$

Esto significa que para dos partículas interactuantes, el cambio de momento lineal de una partícula es opuesto al cambio de momento de la otra. Es un ejemplo conocido que el cañón retrocede perdiendo momento que gana la bala.

El cambio de momento de una partícula se puede expresar como:

$$\Delta\vec{p} = \Delta\left(m\vec{v}\right) = m\Delta\vec{v}$$

y la [3] quedaría como:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\left|\Delta\vec{v}_1\right|}{\left|\Delta\vec{v}_2\right|}$$

Esta ecuación permite redefinir el concepto de masa dinámicamente comparándola con un patrón en movimiento de modo que la masa y los cambios de velocidad son inversamente proporcionales. Ha habido muchos estudios que han comprobado que la masa definida estáticamente coincide absolutamente con la masa definida dinámicamente. En 1986 Fischbach *et al* reanalizaron los algunos experimentos de caída libre de Eötvös *et al* de 1922 y creyeron haber encontrado discrepancias entre la masa estática y dinámica lo cual supondría la existencia de otro tipo de interacción desconocido (que se denominó quinta fuerza).

2.3. 2ª y 3ª ley de Newton: concepto de fuerza.

2.3.1. Relación entre la fuerza y el cambio de momento lineal.

Partiendo de la ecuación [3], si dividimos ambos miembros por $\Delta t = t' - t$ tenemos: $\frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$ y si hacemos el intervalo de tiempo muy corto $\Delta t \to 0$, entonces:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \qquad [4]$$

Designamos como fuerza el cambio de momento lineal en el tiempo:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad [5]$$

expresión que se conoce como 2ª ley de Newton para la traslación.

2.3.2. Ley de acción-reacción.

Si utilizamos [5] en [4] tenemos:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \qquad [6]$$

expresión conocida como 3ª ley de Newton: La fuerza que una partícula ejerce sobre otra es igual y opuesta a la que aquella ejerce sobre esta. Esta ley se conoce como Ley de Acción-Reacción.

Si la masa de la partícula se mantiene constante la variación del momento lineal en el tiempo necesariamente implica la existencia de una fuerza que produzca una aceleración. Por [5] tenemos:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Existen algunos sistemas de masa variable (una gota de líquido, una rampa de transporte de arena, un cohete) en los cuales la variación de momento lineal tiene lugar por la variación de masa además de la variación de velocidad. Por ejemplo, una rampa de transporte en la que se va añadiendo arena necesita una fuerza aplicada para mover la rampa aunque la velocidad de la rampa se mantenga constante. Por supuesto, en el caso de que la masa de arena no variara en una situación realista también se necesitaría una fuerza aplicada para mantener constante la velocidad pero debido a la existencia de las fuerzas de rozamiento que veremos en el siguiente apartado.

Si sobre una partícula actúan varias fuerzas exteriores aplicadas, la partícula sufrirá una aceleración dada por:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{R} = m\vec{a} \qquad [7]$$

donde $\vec{R}$ es la resultante de la suma vectorial de todas las fuerzas exteriores aplicadas a la partícula. Por exteriores entendemos que son fuerzas aplicadas desde un sistema exterior al de la propia partícula. Esta es la generalización de la 2ª ley de Newton para una partícula.

En ocasiones, para resolver ciertos problemas en los que una fuerza se aplica a una partícula durante un intervalo de tiempo conocido, resulta conveniente utilizar la siguiente relación (escalar). Ya que:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} F dt = \int_{v}^{v} m dv$$

A la cantidad Fdt se la denomina impulso mecánico.

2.4. Fuerza de rozamiento.

La ciencia que estudia el rozamiento se denomina Tribología. El rozamiento tiene lugar principalmente debido a la fuerza electromagnética que produce cohesiones o adhesiones entre los cuerpos. El rozamiento depende de cada tipo de material y es mayor si existen irregularidades (rugosidades) entre las superficies de contacto de los cuerpos.

Estudiaremos el rozamiento entre cuerpos rígidos (indeformables) que se denomina rozamiento de Coulomb que fue quien lo estudió de forma más sistemática aunque ya había sido estudiado antes por Leonardo da Vinci. El estudio del rozamiento entre cuerpos deformables o entre fluidos es más complejo.

El rozamiento de Coulomb (entre cuerpos rígidos) es independiente del área de contacto entre los cuerpos. Esto no ocurre cuando los cuerpos son deformables (como un neumático) en que a mayor área el rozamiento es mayor. El rozamiento de Coulomb tampoco varía al variar la velocidad de deslizamiento entre las superficies y supondremos que no depende tampoco de la temperatura.

2.4.1. Rozamiento estático y cinético.

Cuando las superficies de contacto entre dos superficies están en reposo relativo, al iniciarse el movimiento aparece el denominado **rozamiento estático**. La existencia de rozamiento estático implica que sea necesaria una fuerza para empezar a mover un cuerpo que reposa sobre otro. Esta fuerza se denomina fuerza de rozamiento F_r y es proporcional reacción de la superficie a la componente perpendicular del peso (normal N) del cuerpo y a un coeficiente de rozamiento estático μ_e que depende del tipo de cuerpos (existen tablas de coeficiente de rozamientos para diferentes materiales):

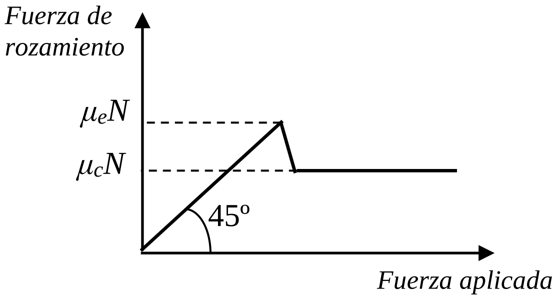
$$F_r = \mu_e N \qquad [8a]$$

Este rozamiento estático se opone al movimiento entre las superficies por lo que normalmente siempre se opone al movimiento de los cuerpos. Existe un caso trivial en que el rozamiento ayuda al movimiento y es el caso en que un cuerpo está en reposo sobre una rampa horizontal que se mueve (o sobre la mano). En este caso la fuerza de rozamiento estática evita que haya deslizamiento mutuo entre las superficies pero es la propia fuerza de rozamiento quien hace que el cuerpo avance. Otro caso menos trivial es el de una rueda de un coche o una bola de billar que en algún momento estén rodando muy rápido y no avancen lo suficiente porque están derrapando (esto ocurre cuando en un coche parado se suelta muy rápido el pie del embrague mientras se acelera bastante suponiendo que no esté el control de tracción activo). En este caso el coche (o la bola de billar si ha sido golpeada con el taco por su parte superior) irá ganando velocidad gracias al rozamiento de las ruedas con el asfalto, es decir, en este caso la fuerza de rozamiento ayuda también al movimiento.

El **rozamiento cinético** tiene lugar cuando ya existe deslizamiento entre las superficies de los cuerpos. Este rozamiento cinético tampoco depende del área de contacto (para cuerpos rígidos) ni de la velocidad. Depende de la reacción normal de la superficie al peso (normal) y del llamado coeficiente de rozamiento cinético:

$$F_r = \mu_c N \qquad [8b]$$

Normalmente ocurre que $\mu_c < \mu_e$ (en torno a un 25%), lo cual implica que hay que hacer más fuerza para empezar a mover un cuerpo que para mantenerlo a velocidad constante una vez que ya se ha empezado a mover. Esto parece lógico ya que cuando el cuerpo está parado todas las imperfecciones entre ambas superficies han encajado y se ha alcanzado una situación de mínimo de energía que es mucho más estable.



Conviene aclarar que cuando a un cuerpo se le aplica una fuerza menor que la fuerza de rozamiento estática que necesita para empezar a moverse, entonces la superficie de contacto reacciona con una fuerza igual y contraria a la que se está aplicando y por esto el cuerpo no se mueve. En este sentido, la fuerza de rozamiento coincide con la fuerza aplicada para fuerzas aplicadas menores que la fuerza de rozamiento estática. Una vez que la fuerza aplicada ha superado el máximo y el cuerpo se empieza a mover, al entrar en situación de deslizamiento, la fuerza de rozamiento disminuye de forma más o menos abrupta (en la realidad dependiendo del tipo de material, homogeneidad de las superficies, área de contacto, etc)

2.5. Fuerzas ficticias o de inercia.

2.5.1. Sistemas no inerciales.

Contrariamente a lo dicho en el § 2.1.2 (sistemas inerciales), un sistema no inercial es un sistema de referencia que se traslada con velocidad no constante (con aceleración) o rota. Debido a ello las partículas que se encuentran en un sistema no inercial sienten como si hubiera una fuerza actuando sobre ellas que se denomina fuerza ficticia y que tiende a sacarlas del sistema para mantenerlas en una situación estática. Por esto las fuerzas ficticias también se llaman de inercia ya que la inercia es la oposición al cambio del movimiento.

Así cuando un coche acelera se convierte en un sistema no inercial y las personas en su interior sienten una fuerza aplicada que los pega contra el asiento (en un coche potente…). En este caso, la aceleración del sistema es hacia adelante y los asientos ejercen también una fuerza hacia adelante pero las partes móviles (personas) sienten una fuerza contraria (ficticia o de inercia) y de igual magnitud que los pega contra el asiento.

Al estudiar la dinámica en los sistemas no inerciales se puede proceder de dos modos distintos que son equivalentes:

1) Aplicar la 2ª ley de Newton [7] ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$), considerando en el lado izquierdo de la ecuación las fuerzas reales aplicadas a la partícula y en el lado derecho la masa de la partícula multiplicada por su aceleración. En el ejemplo del coche, la fuerza hacia adelante que ejerce el asiento es la fuerza real *F* (lado izquierdo de la 2ª ley de Newton). La aceleración *a* de la persona es también hacia adelante, luego en el lado derecho de la 2ª ley ponemos *ma* donde *m* es la masa de la persona. Queda $F = ma$
2) Considerar que la fuerza ficticia que se siente en los sistemas no inerciales es una fuerza real y, por lo tanto, ponerla en el lado izquierdo de la 2ª ley de Newton. En este caso, estaremos en una situación de equilibrio estático y entonces no habrá aceleración (a = 0) en el lado derecho de la 2ª ley de Newton. En el caso del coche, en el lado izquierdo de la 2ª ley de Newton además de la fuerza *F* hacia adelante ejercida por el asiento hay que contabilizar, como real (sabiendo que es ficticia), la fuerza contraria que nos pega contra el asiento y que vale –*ma*. El lado derecho de la 2ª ley será ahora nulo ya que estamos en una situación de equilibrio. Queda: $F - ma = 0$, que evidentemente coincide el resultado del modo anterior.

   Como veremos, este segundo método para estudiar la dinámica en sistemas no inerciales en ocasiones es muy útil y se denomina método de D’Alembert.

2.5.2. Fuerza centrífuga.

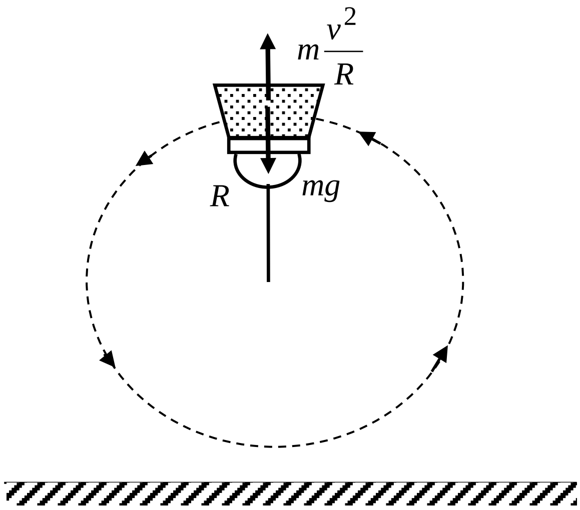
Según la ecuación [5]del capítulo 1, la aceleración en el movimiento curvilíneo toma la forma: $\vec{a} = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n$ y ya que $\vec{F} = m\vec{a}$ resulta:

$$F = ma_t\vec{u}_t + ma_n\vec{u}_n = m\frac{dv}{dt}\vec{u}_t + m\frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n = F_t\vec{u}_t + F_n\vec{u}_n$$

La componente F_n se denomina fuerza centrípeta y está dirigida hacia el interior de la curva. Es la fuerza real que curva la trayectoria.

Puesto que un sistema que rota es un sistema no inercial, la fuerza real centrípeta tiene una correspondiente fuerza de inercia (ficticia) en sentido contrario y de igual magnitud que está dirigida hacia fuera de la curva y se denomina fuerza centrífuga.

Ejemplo: cuando volteamos una cuerda de longitud R con un cubo lleno de agua de masa m en su extremo, ¿cuál debe ser la mínima velocidad con la que debe girar el cubo para que no se derrame el agua?



Se debe observar que, con la velocidad mínima para poder dar la vuelta, la cuerda no deberá tener tensión en el punto más alto. Si utilizamos el método de resolver la 2ª ley de Newton con fuerzas reales, la única fuerza real F que actúa sobre el agua del cubo es su peso mg que debe figurar en el lado izquierdo de la ecuación de la 2ª ley. En el lado derecho, pondremos su masa por su aceleración ma siendo a la aceleración centrípeta dirigida hacia el centro del círculo v^2/R. Queda:

$$F = ma \quad \Rightarrow \quad mg = m\frac{v^2}{R}$$

Y se despeja v.

Por el método de considerar fuerzas ficticias (de D'Alembert), en el lado izquierdo de la 2ª ley de Newton ponemos el peso (fuerza real F) y añadimos la fuerza centrífuga (ficticia) como si fuera una fuerza real de sentido contrario y valor $-mv^2/R$. Como se debe mantener el equilibrio, en el lado derecho no habrá aceleración y será nulo su valor. Queda:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad mg - m\frac{v^2}{R} = 0$$

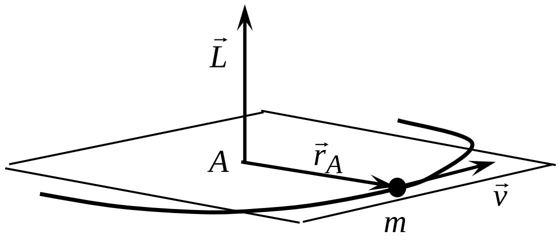
igual que en el otro método.

2.6. Momento angular.

2.6.1. Definición del momento angular.

El momento angular $\vec{L}$ es una cantidad vectorial que se define como el momento de la cantidad de movimiento:

$$\vec{L} = \vec{r}_A \times \vec{p} = \vec{r}_A \times m\vec{v} \qquad [9]$$



Para una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$ por una trayectoria con un radio de curvatura $\vec{r}_A$, el producto vectorial $\vec{r}_A \times m\vec{v}$ es el vector momento angular $\vec{L}$. Es un vector siempre perpendicular al plano del movimiento siendo A un punto fijo

Si la trayectoria es circular con velocidad angular ω entonces $\left|\vec{L}\right| = mrv = mr^2\omega$

2.6.2. 2ª ley de Newton para la rotación.

Si derivamos la ecuación [9] con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\cancel{\left(\frac{d\vec{r}_A}{dt} \times \vec{p}\right)}}_{0} + \left(\vec{r}_A \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{\tau}_A$$

donde el primer término se anula ya que $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{p} = 0$ al ser $\vec{v}\,//\,\vec{p}$ (paralelos).

La magnitud $\vec{\tau}_A$ se denomina momento (par o torque) de la fuerza $\vec{F}_A$ respecto del punto fijo A (frecuentemente, el momento de fuerzas también se designa por $\vec{M}$. Es interesante notar que el momento de fuerza tiene las mismas unidades (Nm) que la energía (como veremos en el capítulo 4). Esto es así porque el momento de una fuerza representa una palanca de esa fuerza con respecto a A. Las palancas multiplican la fuerza pero conservan la energía, es decir, ejercen el mismo momento de fuerza en ambos brazos. De hecho, el producto del par por el ángulo es la energía desarrollada.

Tenemos entonces que:

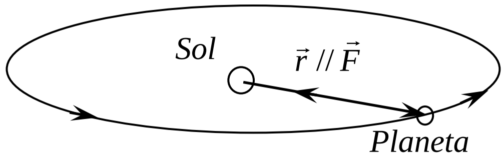
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_A \qquad [10]$$

Del mismo modo que la ecuación [5] ($\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$) es la 2ª ley de Newton para la traslación, por su semejanza podemos llamar a la ecuación [10], 2ª ley de Newton para la rotación.

Las ecuaciones [5] y [10] se emplearán conjuntamente en el capítulo 5 para resolver problemas de dinámica de la rotación.

2.6.3. Fuerzas centrales.

Una fuerza aplicada a una partícula es central si siempre está dirigida al mismo punto. En una fuerza central el vector posición es paralelo al vector fuerza. Así, las fuerzas gravitatorias son centrales como ocurre con el Sol y los planetas porque siempre están dirigidas hacia el Sol, y el vector posición (radio vector Sol-Planeta) es siempre paralelo a la fuerza de la gravedad. Otro ejemplo, de fuera central son las fuerzas electrostáticas.



Al ser el vector de posición paralelo al vector fuerza, el momento (torque) de una fuerza central es nulo con respecto al centro de fuerzas:

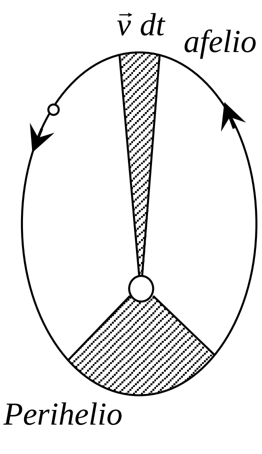
$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = cte$$

Esto implica que en una partícula sometida a una fuerza central el momento angular es una constante del movimiento.

Las leyes de Kepler pueden ser deducidas aplicando las características de las fuerzas centrales:

1ª ley de Kepler: *Las órbitas de los planetas con cerradas y elípticas. El sol está en uno de los focos de la órbita.* A la distancia planeta-Sol más corta se la llama perihelio y al mayor alejamiento afelio.

2ª Ley de Kepler: *El radio vector de un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.* Esto significa que el planeta va más rápido por la zona del perihelio que en la zona del afelio. Cada área triangular vale:



$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\,dt\right| = \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times m\vec{v}\,dt\right| = \frac{1}{2m}\left|\vec{L}\right| dt$ y como en una fuerza central $\vec{L} = cte \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = cte$ es decir, la forma en que varían las áreas barridas es constante en el tiempo.

3ª ley de Kepler: *El cuadrado del periodo de revolución de cualquier planeta con respecto al Sol es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol.*

La demostración es más sencilla considerando órbitas circulares aunque se puede realizar igualmente con órbitas elípticas. En realidad las órbitas de los planetas son muy poco excéntricas por lo que son casi circulares; en cambio las órbitas de los cometas son muy excéntricas de modo que los cometas pasan gran parte del tiempo en su afelio.

Aplicamos la 2ª ley de Newton a un planeta: $F = m_p a$ donde m_p es la masa del planeta y a su aceleración centrípeta v^2/r siendo r la distancia Sol-planeta. La fuerza F es la fuerza de interacción gravitatoria de Newton: $F = G\frac{M_S m_p}{r^2}$ con $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 la constante de gravitación universal y M_S la masa del Sol:

Ahora: $$G\frac{M_S m_p}{r^2} = m_p \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM_S}{r}$$

Sabemos que el planeta recorre una distancia $2\pi r$ en un periodo $T \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2\pi r}{T}$ que introducido en la ecuación de la velocidad anterior resulta:

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM_S}{r} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} r^3$$

como enunciaba la 3ª ley de Kepler.