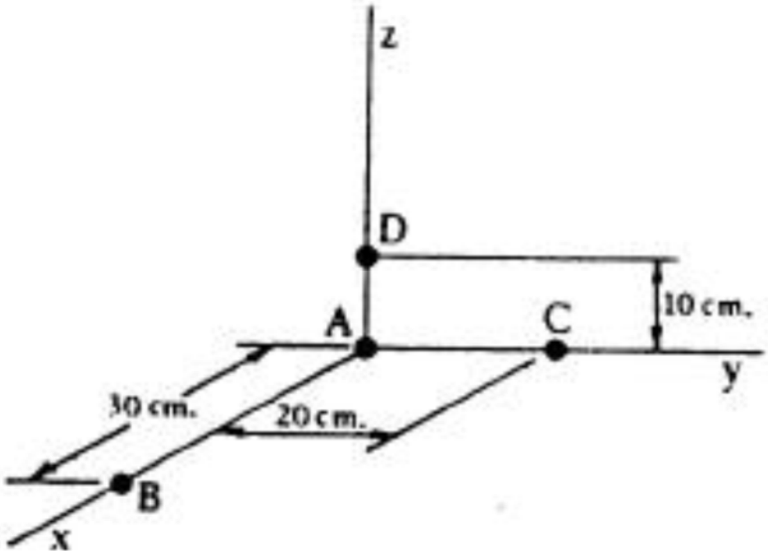
PROBLEMAS RESUELTOS TEMA: 4

1.- Determinar la posición del centro de gravedad del sistema formado por los cuatro puntos materiales, *A*, *B*, *C* y *D* distribuidos según la figura. Datos: m_A = 100 g, m_B = 200 g, m_C =150 g, m_D = 50 g.

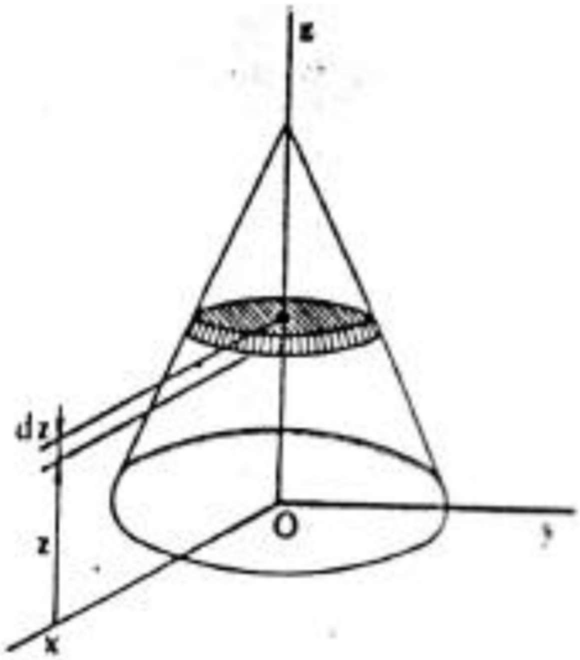


$$X_{CM} = \frac{200 \cdot 30}{100 + 200 + 150 + 50} = 12 \text{ cm}$$

$$Y_{CM} = \frac{150 \cdot 20}{100 + 200 + 150 + 50} = 6 \text{ cm}$$

$$Z_{CM} = \frac{50 \cdot 10}{100 + 200 + 150 + 50} = 1 \text{ cm}$$

2.- Determinar el centro de gravedad de un cono recto de altura *h*.



Si llamamos R al radio de la base del cono, se cumple que el área de la base es $A = \pi \cdot R^2$. Para una altura Z, se cumple que el área de dicha base será: $A_z = \pi \cdot r^2$. Si α es el ángulo que forma la superficie lateral del cono con el eje vertical, tenemos:

$$\tan\alpha = \frac{R}{h} = \frac{r}{h-z} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{R} = \frac{(h-z)}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_z}{A} = \frac{(h-z)^2}{h^2}$$

y como el diferencial de volumen es: $dV = A_z \cdot dz$ entonces:

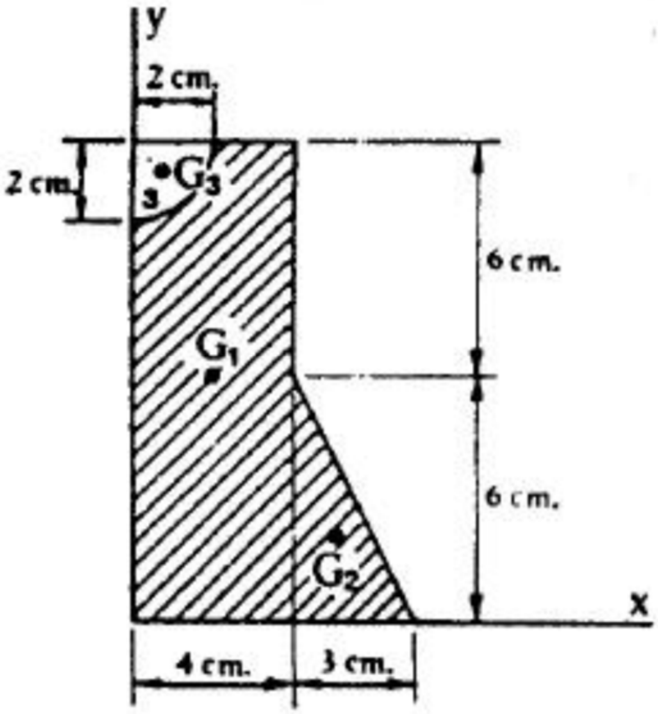
$$dV = A \cdot \frac{(h-z)^2}{h^2}\, dz$$

Para determinar la altura del centro de masas, utilizamos: $Z_{CM} = \frac{\int ZdV}{\int dV}$

$$Z_{CM} = \frac{\int_0^h Z \cdot \frac{A \cdot (h-Z)^2}{h^2} dz}{\int_0^h \frac{A \cdot (h-Z)^2}{h^2}\, dz} = \frac{\int_0^h Z(h-Z)^2\, dz}{\int_0^h (h-Z)^2\, dz} = \frac{h}{4}$$

Como se observa, el resultado es independiente del radio R y sólo depende la altura h.

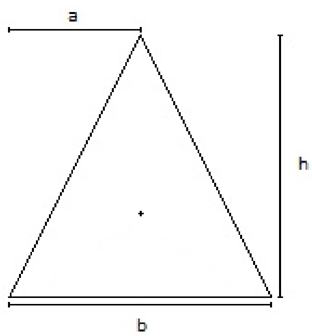
3.- Determinar el centro de gravedad de la superficie rayada.



En el sistema de ejes coordenados de la figura tenemos que:

$A_1 = 4 \cdot 12 = 48\ \mathrm{cm}^2$ y sus coordenadas de su CM: $x_1 = 2\ \mathrm{cm}$ e $y_1 = 6\ \mathrm{cm}$

$A_2 = \frac{1}{2}\ b \cdot h \implies A_2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 6 = 9\ \mathrm{cm}^2$



Sus coor. del CM cumplen : $\begin{cases} \bar{x} = \frac{a+b}{3} \\ \bar{y} = \frac{h}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 4 + \frac{1}{3} 3 = 5\ \mathrm{cm} \\ y_2 = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2\ \mathrm{cm} \end{cases}$

(en el triángulo a = 0, b = 3 cm y h = 6 cm)

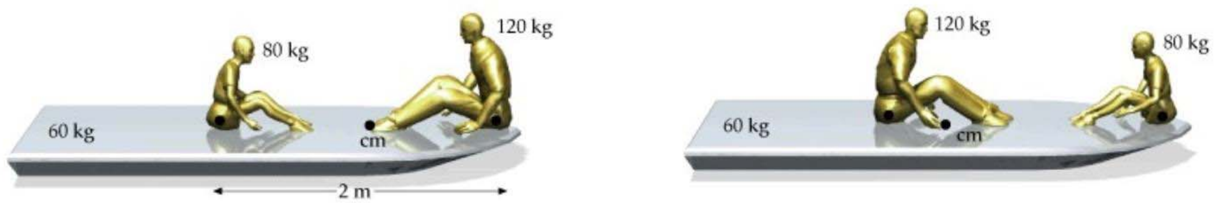
Para el semicírculo tendremos en cuenta que al ser hueco es como si tuviera masa negativa:

$A_3 = -\pi \cdot \frac{2^2}{4} = -3.141\ \mathrm{cm}^2$ en este caso: $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{\pi} = 0.848\ \mathrm{cm} \\ y_3 = 12 - 0.848 = 11.152\ \mathrm{cm} \end{cases}$

Finalmente, para el conjunto de las 3 figuras:

$$\begin{cases} X_{CM} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{48 \cdot 2 + 9 \cdot 5 - 3.141 \cdot 0.848}{48 + 9 - 3.141} = 2.47\mathrm{cm} \\ Y_{CM} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{48 \cdot 6 + 9 \cdot 2 - 3.141 \cdot 11.152}{48 + 9 - 3.141} = 5.05\ \mathrm{cm} \end{cases}$$

4.- Dos personas A (masa 80 kg) y B (masa 120 kg) se encuentran en un bote de remos (masa 60 kg). A está sentado en el centro del bote, y B en un extremo a 2 m del centro. Partiendo con el bote en reposo, ambas personas intercambian sus posiciones. ¿Qué distancia se ha movido el bote al intercambiarse las dos personas?



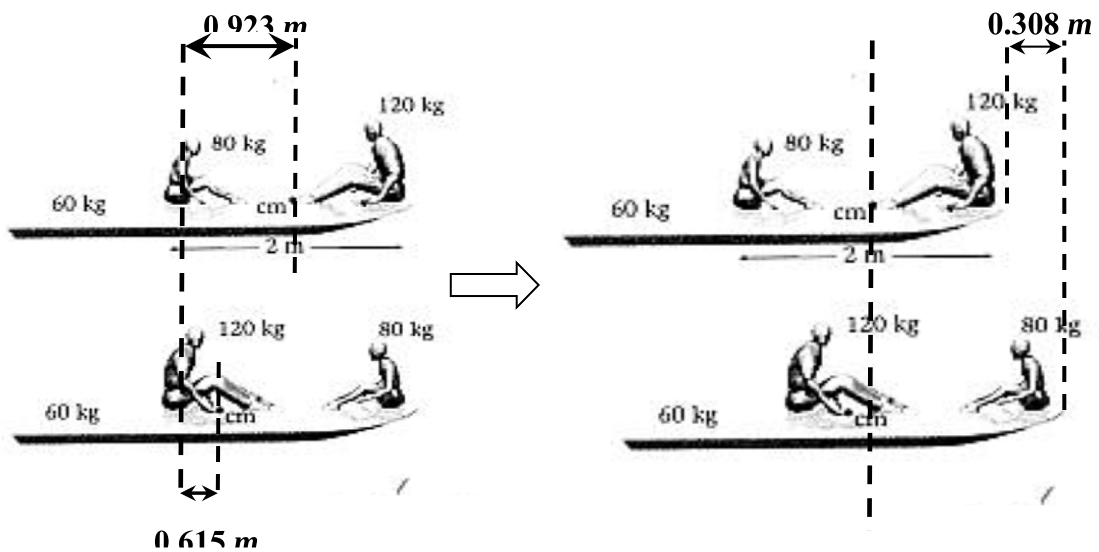
Sabemos que el centro de masas del sistema no se moverá ya que la barca se supone que tiene un rozamiento con el agua despreciable y no hay fuerzas externas al sistema. Por ello, vamos a calcular la posición, *respecto al centro de bote*, del centro de masas de la disposición inicial y después de la disposición final. Posteriormente, restando la posición final de la inicial inicial obtendremos la distancia que ha recorrido el bote en el intercambio:

$$X_{CMinicial} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{80 \cdot 0 + 60 \cdot 0 + 120 \cdot 2}{80 + 60 + 120} = 0.923 \text{ m}$$

$$X_{CMfinal} = \frac{120 \cdot 0 + 60 \cdot 0 + 80 \cdot 2}{80 + 60 + 120} = 0.615 \text{ m}$$

$$X_{CMinicial} - X_{CMfinal} = 0.923 - 0.615 = 0.308 \text{ m}$$

Esta sería la distancia que recorre el bote al intercambiarse las posiciones, el bote se movería hacia la derecha pues al final el centro de masa está más cerca del centro del bote.



En la situación de la derecha se han hecho coincidir los CM de modo que la barca ha avanzado 0.308 m.

5.- Se dispara una bala contra un bloque suspendido mediante un cable. El bloque con el proyectil incrustado oscila como un péndulo. Si las masas de la bala y del bloque son m_1 y m_2, respectivamente y la altura máxima alcanzada en la oscilación es h_1, determinar la velocidad de la bala.

El choque es *totalmente inelástico* (plástico) ya que la bala queda incrustada, por lo tanto el momento lineal se conserva en el choque pero no se conserva la energía cinética de la bala de la cual una parte se pierde en calor y deformación. Conservando el momento lineal, tenemos:

$$m_1 v_{1i} + m_2 \cdot 0 = (m_1 + m_2) V_f \rightarrow v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} V_f$$

V_f, es la velocidad final del bloque y la bala. Después de que la bala y el bloque hayan adquirido la V_f, se conservará la energía. La energía cinética de bala-bloque se convertirá en energía potencial bala-bloque:

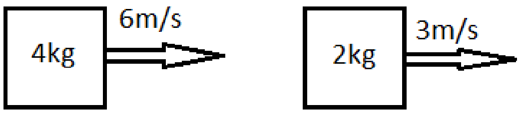
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_f^2 = (m_1 + m_2) g \cdot h \quad \Longrightarrow \quad V_f = \sqrt{2gh}$$

Por tanto:

$$v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} V_f = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$$

6.- Un bloque de 4 kg que se mueve hacia la derecha con una velocidad de 6 m/s realiza un choque elástico con un bloque de 2 kg que también se mueve hacia la derecha, pero cuya velocidad es de 3 m/s. Calcular las velocidades finales de cada bloque utilizando tanto el sistema de referencia laboratorio como el sistema de referencia del centro de masas.

1) Utilizamos el sistema de referencia laboratorio (respecto a un punto exterior).



El momento lineal inicial es igual al final, por lo que:

$$P_i = m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} = 4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 30\ kg \cdot m/s$$

$$P_f = m_1 V_{1f} + m_2 V_{2f} = 4V_{1f} + 2V_{2f} = 30\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$

La velocidad de aproximación es:

$$V_{2i} - V_{1i} = 3 - 6 = -3\ \mathrm{m/s}$$

Como el choque es elástico, el coeficiente de restitución *e* = 1 y la velocidad de retroceso es igual a la de aproximación pero cambiada de signo luego:

$$V_{2f} - V_{1f} = -(V_{2i} - V_{1i}) = 3\ \mathrm{m/s}$$

Tenemos entonces, dos ecuaciones con las cuales ya podemos calcular las velocidades finales:

$$4V_{1f} + 2V_{2f} = 30$$

$$V_{2f} - V_{1f} = 3$$

De la 2ª ecuación:

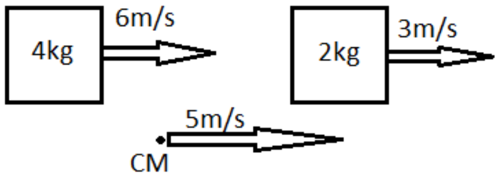
$$V_{2f} = 3 + V_{1f} \implies 4V_{1f} + 2(3 + V_{1f}) = 30 \implies \boldsymbol{V_{1f}} = \frac{24}{6} = \mathbf{4\ m/s}$$

$$V_{2f} = 3 + V_{1f} \implies \boldsymbol{V_{2f}} = \mathbf{7\ m/s}$$

2) Utilizamos ahora el sistema de centro de masas:

Calculamos la velocidad del centro de masa:

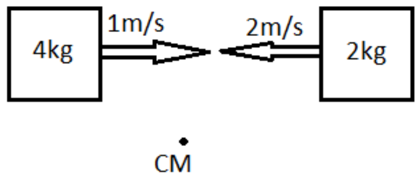
$$V_{CM} = \frac{m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{4 \cdot 6 + 2 \cdot 3}{4 + 2} = 5\ \mathrm{m/s}$$



Las velocidades con respecto al centro de masas son (designadas con primas):

$$V'_{1i} = V_{1i} - V_{CM} = 6 - 5 = 1 \text{ m/s}$$

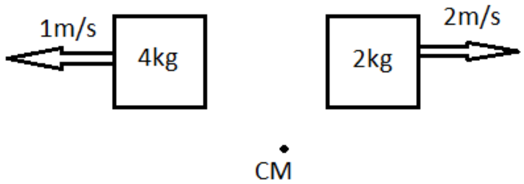
$$V'_{2i} = V_{2i} - V_{CM} = 3 - 5 = -2 \text{ m/s}$$



El momento lineal en el sistema centro de masas es siempre nulo antes del choque y, por tanto, debe serlo también después del choque. Desde el CM, el choque ocurre como si fuera un rebote en un espejo, esto es, los momentos lineales son opuestos antes y después del choque para cada masa. Por esto se cumple:

$$V'_{1f} = -V'_{1i} \quad \Rightarrow \quad V'_{1f} = -1 \text{ m/s}$$

$$V'_{2f} = -V'_{2i} \quad \Rightarrow \quad V'_{2f} = 2 \text{ m/s}$$



Por tanto, en el sistema laboratorio:

$$\boldsymbol{V_{1f}} = V'_{1f} + V_{CM} = -1 + 5 = \mathbf{4\ m/s}$$

$$\boldsymbol{V_{2f}} = V'_{2f} + V_{CM} = 2 + 5 = \mathbf{7\ m/s}$$

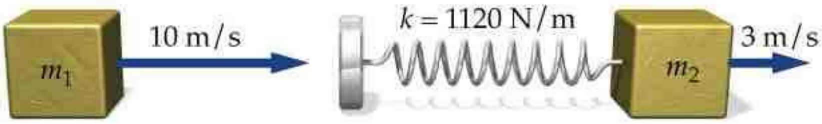
Que como debe ser coinciden con las velocidades finales halladas por el método anterior.

7.- Un bloque de masa m_1 = 2 kg se desliza sobre una mesa sin rozamiento con una velocidad de 10 m/s. Directamente enfrente de este bloque y moviéndose en la misma dirección con una velocidad de 3 m/s hay otro bloque de masa m_2 = 5 kg, conectado a un muelle de masa despreciable y constante de fuerza k = 1120 N/m:

a) Antes de que m_1 choque contra el muelle, ¿cuál es la velocidad del centro de masas del sistema?

b) Después del choque, el muelle se comprime hasta un valor máximo Δx. Determinar dicho valor.

c) Los bloques eventualmente se separan de nuevo. ¿Cuáles son las velocidades finales de los bloques medidas en el sistema de referencia de la mesa?



a)

$$V_{CM} = \frac{2 \cdot 10 + 5 \cdot 3}{2+5} = \frac{35}{7} = 5 \text{ m/s}$$

b) Cuando el muelle se haya comprimido totalmente ambas masas se moverán con la misma velocidad V_{CM}. El sistema posee una energía cinética inicial antes del choque que, después del choque, se transformará en energía elástica (interna) y energía de traslación (externa).

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{CM}^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{2\left(\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{CM}^2\right)}{k}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 3^2 - 175}{1120}} = 0.25 \text{ m}$$

c) En el sistema CM sabemos que el momento lineal del CM es nulo al igual que la velocidad del CM, por lo tanto

$$0 = m_1V'_1 + m_2V'_2 \quad \Rightarrow \quad -m_1V'_1 = m_2V'_2 \quad \Rightarrow \quad V'_2 = -\frac{m_1V'_1}{m_2}$$

Al abrirse el muelle, la energía interna del sistema $\frac{1}{2}kx^2$ se habrá transformado en E_K relativa al CM:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_1V'^2_1 + \frac{1}{2}m_2V'^2_2$$

Al sustituir la expresión hallada para V'_2, resulta

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}V'^2_1 \cdot \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right)$$

Despejando resulta:

$$V'_1 = -5 \text{ m/s}$$

$$V'_2 = -\frac{2 \cdot (-5)}{5} = 2 \text{ m/s}$$

El signo negativo de la V'_2 es debido a que va en dirección contraria a la V'_1. En este caso la V'_1 hacia la izquierda y la V'_2 hacia la derecha.

El CM se mueve hacia la derecha con una $V_{CM} = 5$ m/s por lo que obtenemos las siguientes velocidades después de separarse, respecto al sistema laboratorio (sistema mesa):

$$V''_1 = V'_1 + V_{CM} = -5 + 5 = 0 \text{ m/s}$$

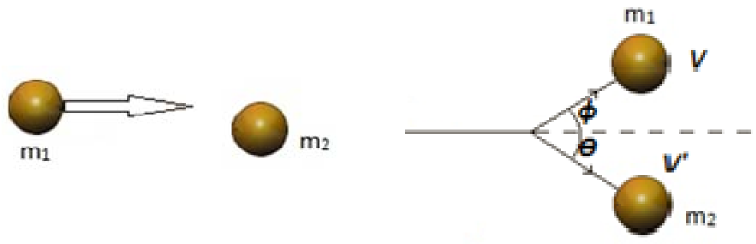
$$V''_2 = V'_2 + V_{CM} = 2 + 5 = 7 \text{ m/s}$$

8.- Una partícula tiene inicialmente una velocidad *v_0*. Choca contra otra en reposo y se desvía un ángulo ϕ. Su velocidad después del choque es *v*. La segunda partícula se desvía formando un ángulo θ con la dirección inicial de la primera partícula.

a) Demostrar que:

$$\tan\theta = \frac{v\sin\phi}{v_0 - v\cos\phi}$$

b) ¿Ha de admitirse que el choque ha sido elástico o inelástico para llegar a este resultado?



Conservación de las componentes horizontales del momento lineal:

$$m_1 v_0 = m_1 \cdot v \cos\phi\, ϕ + m_2 v' \cos\theta$$

Conservación de las componentes verticales del momento lineal:

$$m_1 v \sin\phi\, ϕ = m_2 v' \sin\theta$$

De la primera ecuación:

$$\cos\theta = \frac{m_1 v_0 - m_1 \cdot v\cos\phi\, ϕ}{m_2 v'}$$

De la segunda ecuación:

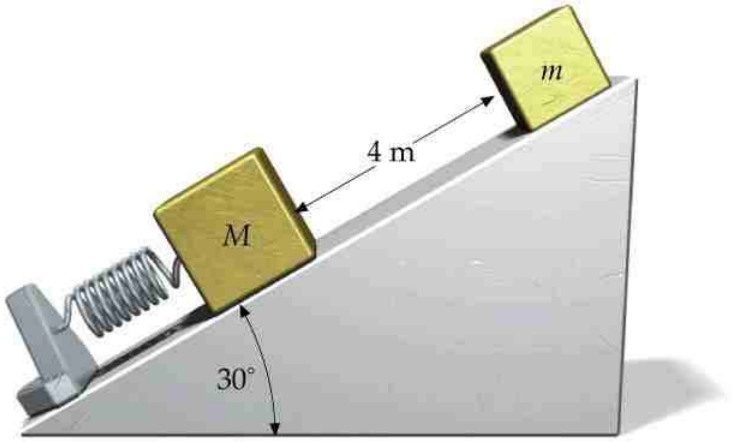
$$\sin\theta = \frac{m_1 v \sin\phi\, ϕ}{m_2 v'}$$

Dividiendo ambas:

$$\tan\theta = \frac{\frac{m_1 v \sin\phi\, ϕ}{m_2 v'}}{\frac{m_1 v_0 - m_1 \cdot v\cos\phi\, ϕ}{m_2 v'}} = \frac{m_1 v \sin\phi\, ϕ}{m_1 v_0 - m_1 \cdot v\cos\phi\, ϕ} = \frac{v\sin\phi}{v_0 - v\cos\phi}$$

b) Ninguna de ellas ya que el resultado es algo completamente general que sólo se ha hallado a partir de la conservación del momento lineal y no de la conservación de la energía.

9.- Inicialmente, la masa $m = 1.0$ kg y la masa M están ambas en reposo sobre un plano inclinado sin rozamiento. La masa M se apoya en un muelle de constante 11000 N/m. La distancia a lo largo del plano entre m y M es de 4.0 m. La masa m se deja libre, choca elásticamente con la masa M y rebota hasta una distancia de 2.56 m sobre el plano inclinado. La masa M se detiene momentáneamente a 4 cm de su posición inicial. Determinar la masa M.



Puesto que el choque es elástico la energía cinética que adquiere el bloque *m* al descender, se convierte en E_K. El bloque M absorbe una parte de esa energía y la otra parte la emplea *m* en volver a subir:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV^2 \qquad [1]$$

La energía cinética de *m* al llegar a *M* se calcula a partir de la energía potencial que ha perdido *m* al descender una altura *h*:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mg4\sin 30 \qquad h = altura\ de\ descenso \qquad [2]$$

Al rebotar, el cuerpo de masa *m* convertirá su energía cinética en energía potencial al llegar a una altura *h'*:

$$\frac{1}{2}mv'^2 = mgh' = mg2{,}56\sin 30 \qquad h' = altura\ de\ ascenso \qquad [3]$$

La energía cinética ganada en el choque por *M* se emplea en comprimir al muelle 4 cm más de lo que ya estaba. No hace falta contabilizar la energía potencial perdida por *M* al descender 4 *cm* ya que dicha energía se contabiliza en la compresión del muelle:

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}k(x + 0{,}04)^2 - \frac{1}{2}kx^2 = energía\ ganada\ por\ el\ muelle \qquad [4]$$

Siendo x la distancia originalmente de compresión del muelle de modo que:

$$Mg\sin 30 = kx \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{kx}{g\sin 30} \qquad [5]$$

Sustituyendo [2], [3] y [4] en [1], resulta:

$$mg4\sin 30 - mg2{,}56\sin 30 = energía\ ganada\ por\ el\ muelle$$

Sustituyendo el valor de la masa *m* y la constante *k* del muelle, tenemos:

$$7{,}056 = \frac{1}{2}11000(x+0{,}04)^2 - \frac{1}{2}k\cdot 11000\cdot x^2$$

Despejamos: $x = 0{,}0039\, m = 3{,}9$ mm

Ahora podemos utilizar [5] para sacar el valor de *M*:

$$M = 8{,}89\ \text{kg}$$

10.- Un conductor choca por detrás contra un coche que está parado. La masa del coche golpeado es de $900\ \mathrm{kg}$ y la masa del vehiculo culpable es de $1200\ \mathrm{kg}$. Al chocar ambos coches quedaron enganchados por los parachoques. Por las marcas de frenado, se determina que ambos recorrieron unidos $0,76\ \mathrm{m}$. El coeficiente de rozamiento entre los neumaticos y el asfalto es de $0,92$. Calcular la velocidad (en $\mathrm{km/h}$) que tiene el coche antes de colisionar.

En el choque inelástico se conserva el momento lineal (no se conserva la energía cinética):

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_{CM} \quad \Longrightarrow \quad v_{CM} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Toda la energía cinética de ambos vehículos enganchados se pierde en rozamiento en el trayecto del frenazo:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = (m_1 + m_2) g \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}76$$

Obtenemos:

$$v_1 = 6{,}47\ \mathrm{m/s} = 23{,}32\ \mathrm{km/h}$$

11. Para una colisión elástica no frontal entre dos particulas de igual masa de las cuales una esta en reposo, determinar el ángulo que forman las velocidades de las particulas después del impacto.

El momento lineal se conserva:

$$m\vec{v}_{1i} = m\vec{v}_{1f} + m\vec{v}_{2f}$$

Esto es: $\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$

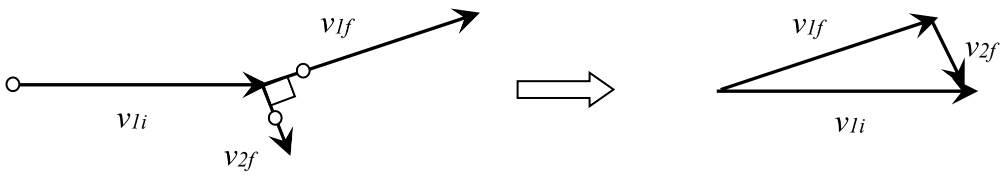
Y la energía cinética también se conserva:

$$\frac{1}{2}m{v_{1i}}^2 = \frac{1}{2}m{v_{1f}}^2 + \frac{1}{2}m{v_{2f}}^2$$

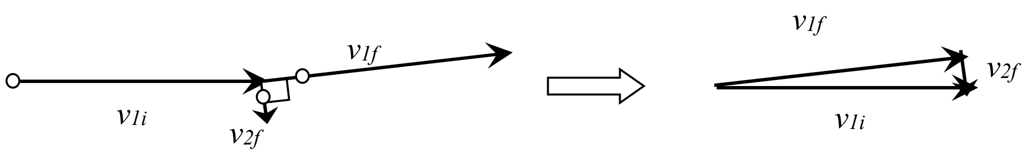
$${v_{1i}}^2 = {v_{1f}}^2 + {v_{2f}}^2$$

Esta relación es el teorema de Pitágoras donde v_{1i} es la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que v_{1f} y v_{2f} forman el ángulo recto $v_{1f} \perp v_{2f}$. Esta disposición de los vectores cumple:

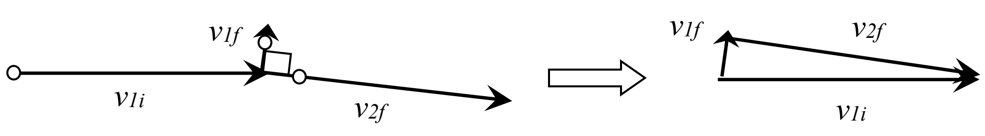
$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$$



Si el choque fuera más rasante igualmente ambas partículas saldrían en ángulo recto pero la partícula que estaba en reposo se desviaría mucho y captaría poca velocidad, y la partícula que ha incidido se desviaría poco y perdería poca de su velocidad:



Si el choque fuera más frontal (menos rasante) igualmente ambas partículas saldrían en ángulo recto pero la partícula que estaba en reposo se desviaría poco y captaría mucha velocidad, y la partícula que ha incidido se desviaría mucho y perdería mucha de su velocidad:



En el caso límite del choque frontal elástico para dos partículas de igual masa, la que estaba en reposo captaría toda la velocidad de la partícula incidente y ésta quedaría en reposo.

12.- Dos puntos materiales de masas $m_1 = 4$ kg y $m_2 = 6$ kg están situados en $(0, 3)$ y $(4, 0)$ respectivamente (coordenadas en metros), siendo sus velocidades $\bar{v}_1 = 2\bar{\imath}$ m/s y $\bar{v}_2 = 3\bar{\jmath}$ m/s. Se pide:

a) Determinar el momento cinético del sistema formado por los dos puntos materiales respecto al origen O del sistema de referencia, así como el momento cinético del sistema respecto a su centro de masas.

b) Determinar la energía cinética del sistema respecto a O, así como la energía cinética del mismo respecto a su centro de masas.

c) Supongamos ahora que ambas partículas están unidas por un resorte de constante elástica 2×10^{-3} N/m, inicialmente sin comprimir ni estirar. ¿Afectará esta última condición al movimiento del centro de masas?

d) ¿Permanecerá constante la suma de la energía cinética y la energía potencial elástica del sistema?

e) En un cierto instante, el resorte está alargado 4 cm. Determinar el trabajo realizado por las fuerzas elásticas, así como las energías potencial y cinética del sistema.

Previamente determinamos

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{4 \times 3\vec{\jmath} + 6 \times 4\vec{\imath}}{4 + 6} = 2.4\vec{\imath} + 1.2\vec{\jmath}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_1} = \frac{4 \times 2\vec{\imath} + 6 \times 3\vec{\jmath}}{4 + 6} = 0.8\vec{\imath} + 1.8\vec{\jmath}$$

$$|v_{CM}|^2 = 3.88 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

a) Obtenemos directamente el momento cinético (o angular) del sistema respecto al origen O (sistema laboratorio) como suma de cada momento angular individual:

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}} = \sum \vec{L}_{iO} = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = 3\vec{\jmath} \times 8\vec{\imath} + 4\vec{\imath} \times 18\vec{\jmath} =$$

$$= -24\vec{k} + 72\vec{k} = \mathbf{48}\vec{\boldsymbol{k}}\ \mathbf{kgm^2/s}$$

Aplicando el teorema de Koënig del momento cinético

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times m\vec{V}_{CM} \quad \text{donde} \quad m = \sum m_i = 4 + 6 = 10 \text{ kg}$$

De donde, el momento angular respecto del CM será:

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{CM}} = 48\vec{k} - (2.4\vec{\imath} + 1.2\vec{\jmath}) \times 10(0.8\vec{\imath} + 1.8\vec{\jmath}) = 48\vec{k} - 33.6\vec{k} = \mathbf{14.4}\vec{\boldsymbol{k}}\ \mathbf{kgm^2/s}$$

También podríamos haber calculado $\vec{L}_{CM}$ por el procedimiento más laborioso de

$$\vec{L}_{CM} = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i$$

Siendo $\vec{r}'_i$ el vector posición respecto del CM de la partícula m_i, y $\vec{v}'_i$ su velocidad respecto a CM. De modo:

$$\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_{CM} = 3\vec{j} - 2.4\vec{i} - 1.2\vec{j} = -2.4\vec{i} + 1.8\vec{j}$$

$$\vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_{CM} = 4\vec{i} - 2.4\vec{i} - 1.2\vec{j} = 1.6\vec{i} - 1.2\vec{j}$$

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = 2\vec{i} - 0.8\vec{i} - 1.8\vec{j} = 1.2\vec{i} - 1.8\vec{j}$$

$$|v'_1|^2 = 4.68\ \mathrm{m^2/s^2}$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} = 3\vec{j} - 0.8\vec{i} - 1.8\vec{j} = -0.8\vec{i} + 1.2\vec{j}$$

$$|v'_2|^2 = 2.08\ \mathrm{m^2/s^2}$$

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{CM}} = (-2.4\vec{i} + 1.8\vec{j}) \times 4(1.2\vec{i} - 1.8\vec{j}) + (1.6\vec{i} - 1.2\vec{j}) \times 6(-0.8\vec{i} + 1.2\vec{j})$$
$$= 8.64\vec{k} + 5.76\vec{k} = \mathbf{14.4}\vec{\boldsymbol{k}}\ \mathbf{kgm^2/s}$$

que resulta el mismo valor de antes.

b) La energía cinética del sistema respecto de O es, por definición:

$$E_C = \frac{1}{2}\sum m_i v^2{}_i = \frac{1}{2}[4 \cdot 2^2 + 6 \cdot 3^2] = 35\ \mathrm{J}$$

Aplicando ahora el teorema de Koënig de la energía cinética:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2{}_{CM} + E_{CM} = \frac{1}{2}mv^2{}_{CM} + \frac{1}{2}\sum m_i v'^2{}_i\ ; \qquad m = \sum m_i = 4 + 6 = 10\ \mathrm{kg}$$

De donde

$$E_{CM} = E_C - \frac{1}{2}mv^2{}_{CM} = 35 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3.88 = 15.6\ \mathrm{J}$$

Que también podríamos calcularlo directamente como

$$E_{CM} = \frac{1}{2}\sum m_i v'^2{}_i = \frac{1}{2}[4 \times 4.68 + 6 \times 2.08] = 15.6\ \mathrm{J}$$

pero también hubiera sido más laborioso ya que habría que haber calculado v'_i previamente.

c) Las fuerzas interiores correspondientes al resorte son de resultante nula para todo el sistema pero no para cada partícula individualmente.

$$\vec{R} = \sum(\vec{F}_{i_{ext}} + \vec{F}_{i_{int}}) = \sum\vec{F}_{i_{ext}} = m \cdot \vec{a}_{CM}; \qquad m = \sum m_i$$

Por lo que el movimiento del CM no se afecta por el resorte.

d) Por el teorema de Koënig $E_C = \frac{1}{2}mv^2{}_{CM} + E_{CM}$ y como no hay fuerzas exteriores $v_{CM} = cte$ y la variación $\Delta E_c = \Delta E_{CM}$ se debe sólo a la variación de las fuerzas interiores.

Toda la energía potencial interna del resorte se refleja en la energía cinética interna. Por tanto, la suma de la energía cinética y la energía potencial elástica es constante (la E_C no es constante)

$$-\Delta E_c = -\Delta E_{CM} = \Delta E_{p_{elas}}$$

e) El trabajo elástico es:

$$W_{elás} \int_0^{\Delta l} kx\,dx = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2 = 1.6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}$$

$$\Delta E_{p\,elas} = W_{elas} = 1.6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}$$

$$-\Delta E_C = -\Delta E_{CM} = 1.6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J} = \Delta E_{P_{elas}}$$

$$E_c = 35 - 1.6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J} \cong 35\ \mathrm{J}$$