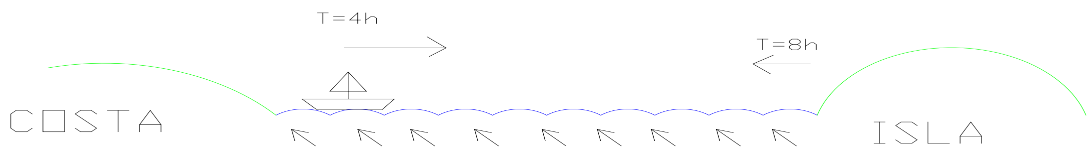
PROBLEMAS RESUELTOS TEMA: 1

1.- Un guardacostas tiene el combustible justo para ir con su lancha desde la costa hasta una isla; éste es un viaje de 4 h en contra de la corriente. Al llegar, resulta que en la isla no queda combustible y pasa las siguientes 8 h flotando a favor de la corriente hasta llegar de nuevo a la costa. El viaje completo pues es de 12 h. ¿Cuánto tiempo hubiera empleado se hubiese encontrado combustible en la isla? Suponer que no se hubiera perdido ningún tiempo en repostar.



En el primer trayecto con gasolina y en contra de la corriente utilizamos la velocidad en movimiento relativo. Si tarda 4h, el espacio recorrido S será la velocidad * tiempo. La velocidad será V-V_C siendo:

$$S = (\mathrm{V} - \mathrm{Vc})4$$

Este espacio S será también el mismo recorrido a la vuelta pero con una velocidad V_C y un tiempo de 8h.

$$S = (V - Vc)4 \quad por\ tanto \quad (V - Vc)4 = Vc8 \rightarrow V = \frac{12Vc}{4} = 3Vc$$

Si hubiera habido combustible en la isla, la velocidad de retorno hubiera sido:

$$V + Vc = 3Vc + Vc = 4Vc$$

La velocidad de ida era:

$$3Vc - Vc = 2Vc$$

El tiempo de retorno hubiese sido:

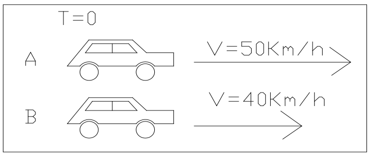
$$T_{retorno} = \frac{S}{V_{retorno}} = \frac{8Vc}{4Vc} = 2\ \mathrm{h}$$

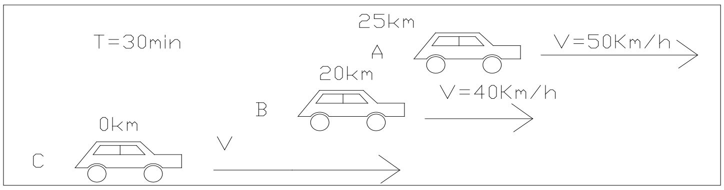
Y el tiempo de ida hubiese sido el mismo:

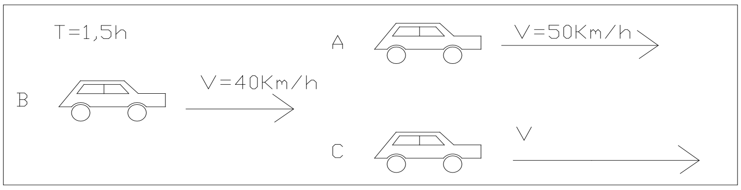
$$T_{ida} = \frac{S}{V_{ida}} = \frac{8Vc}{2Vc} = 4\ \mathrm{h}$$

Luego el tiempo total con combustible hubiese sido: $2\ \mathrm{h} + 4\ \mathrm{h} = 6\ \mathrm{h}$

2.- Dos automóviles partieron del mismo punto, al mismo tiempo y en la misma dirección. La velocidad del 1er automóvil es de 50 km/h y la del 2º de 40 km/h. Después de media hora, del mismo punto y en la misma dirección, parte un 3er automóvil que alcanza al primero 1.5 h más tarde que al segundo. Hallar la velocidad del tercer automóvil.







Sea v = velocidad del 3er automóvil y t = tiempo en alcanzar al segundo vehículo (al de 40 km/h).

Se debe cumplir: $Vt = 20 + 40t$

$$V(t + 1.5) = 25 + 50(t + 1.5)$$

Donde 20 son los kilómetros recorridos por el segundo vehículo en media hora y 25 son los kilómetros recorridos por el primer vehículo en media hora.

Despejamos t en la primera ecuación y lo sustituimos en la segunda.

$$(V - 40)t = 20 \to t = \frac{20}{V - 40}$$

$$V\left(\frac{20}{V - 40} + \frac{3}{2}\right) = 25 + 50\left(\frac{20}{V - 40} + \frac{3}{2}\right)$$

Multiplicamos todo por 2V-80

$$V(3V - 80) = 50V - 2000 - 4000 + 150V$$

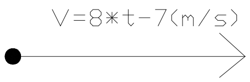
$$3V^2 - 280V + 6000 = 0$$

$$V = \frac{280 \pm \sqrt{280^2 - 12 \cdot 6000}}{6} = 60 \text{ km/h}$$

Con la otra solución (33.3 km/h), el tercer vehículo nunca llegaría a alcanzar a los otros dos. Por lo tanto la velocidad es del tercer automóvil es de 60 km/h. Si además pidieran el tiempo, tardaría:

$$t = \frac{20}{60 - 40} = 1 \text{ h}$$

3.- Una partícula se mueve con velocidad v = 8t-7, en donde v se expresa en metros por segundo y t en segundos.



a) Determinar la aceleración media a intervalos de un segundo comenzando en t = 3 s y en t = 4 s.

b) Representar v en función de t ¿Cuál es la aceleración instantánea en cualquier momento?

a) Para calcular la aceleración media utilizamos la siguiente fórmula: $a_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$

Comenzamos en t = 3 s

$$a_{m1} = \frac{(8 * 4 - 7) - (8 * 3 - 7)}{(4 - 3)} = 8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a_{m2} = \frac{(8 * 5 - 7) - (8 * 4 - 7)}{(5 - 4)} = 8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Si calculáramos a_{m3} sería igual a 8 m/s^2 y así sucesivamente.

Comenzamos en t = 4 s

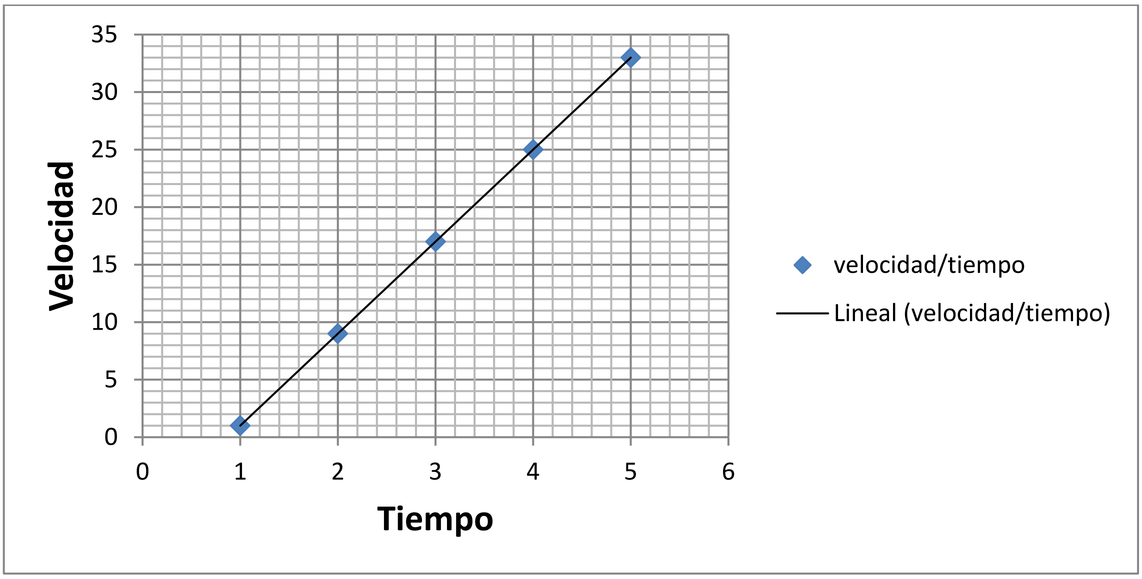
$$a_{m1} = \frac{(8 * 5 - 7) - (8 * 4 - 7)}{(5 - 4)} = 8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a_{m2}\ \frac{(8 * 6 - 7) - (8 * 5 - 7)}{(6 - 5)} = 8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Si calculáramos a_{m3} sería igual a 8 m/s^2 y así sucesivamente.
Por lo tanto podemos asegurar que la a_{media} será de 8 m/s^2

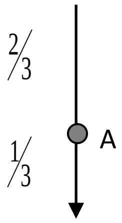
b) La aceleración instantánea es: $a = \frac{dV}{dt} = 8\ \mathrm{m/s^2}$ ya que la derivada de v = 8t − 7 es igual a 8.

Para cualquier momento se puede observar la velocidad en función del tiempo en la siguiente gráfica:



La aceleración instantánea es constante y vale 8, por este motivo la aceleración media vale 8 m/s^2

4.- Una piedra que cae de un acantilado recorre un tercio de su distancia total al suelo en el último segundo de su caída, ¿Qué altura tiene el acantilado?



Utilizamos que el espacio recorrido desde el punto más alto cumple:

$S = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} g t^2,$

si la piedra se deja caer, entonces $V_0 = 0$.

Cuando la piedra pase por A llevará una velocidad V_A y recorrerá 1/3 *h* en 1s de modo que

$$\frac{1}{3} h = V_A \cdot 1 + \frac{1}{2} g \cdot 1^2 = V_A + \frac{1}{2} g$$

Pero V_A es la velocidad que la piedra ha adquirido al recorrer $\frac{2}{3} h$ anteriores a A. Esto habrá ocurrido en un tiempo t':

$$\frac{2}{3} h = \frac{1}{2} g t'^2 \quad \rightarrow \quad t' = \sqrt{\frac{4\,h}{3\,g}}$$

Luego, la velocidad en A será:

$$V_A = g t' = 2 \sqrt{\frac{gh}{3}}$$

entonces:

$$\frac{1}{3} h = V_A + \frac{1}{2} g = 2 \sqrt{\frac{gh}{3}} + \frac{g}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} h - \frac{g}{2} = 2 \sqrt{\frac{gh}{3}}$$

Ahora, elevamos al cuadrado cada miembro, reordenamos y despejamos *h*, quedándonos una ecuación de 2º grado,

$$\frac{h^2}{9} - \frac{5}{3} g h + \frac{g^2}{4} = 0$$

Simplificamos la ecuación,

$$\frac{h^2}{9} - \frac{5g}{3} h + \frac{g^2}{4} \rightarrow \frac{h^2}{9} - \frac{5(9{,}81)}{3} h + \frac{(9{,}81)^2}{4}$$

$$h^2 - 147{,}15 h + 216{,}54 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado,

$$h = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{147{,}15 \pm \sqrt{(-147{,}15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 216{,}54}}{2 \cdot 1} \rightarrow h = 145{,}663 \text{ m}$$

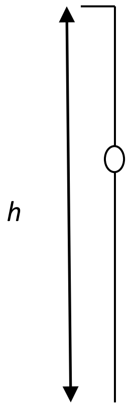
La ecuación nos dará dos soluciones, una de ellas no tiene sentido h = 1,486 m; Analizamos porqué:

Si calculamos la distancia que recorrería la piedra si la dejáramos caer a una velocidad 0 sería:

Distancia piedra → $V_0 \cdot t + \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow 0 + \frac{1}{2} g \cdot 1 = \frac{9{,}8}{2} = 4{,}9$ m

(Como podemos observar la distancia que recorre en 1 *s* ya es mayor y además el ejercicio propone que recorre un tercio de la distancia en el último segundo)

5.- Se deja caer una pelota A desde la parte superior de un edificio en el mismo instante en que desde el suelo se lanza verticalmente hacia arriba una segunda pelota B. En el momento en que las pelotas chocan, se encuentran desplazándose en sentidos opuestos y la velocidad de la pelota A es el doble de la que lleva la pelota B. Determinar a qué altura del edificio se produce el choque expresando ésta en forma de fracción.



$x = \frac{1}{2} g t_c^2$ $\qquad\qquad$ $x + y = h$

$y = V_0 t_c - \frac{1}{2} g t_c^2$ $\qquad\qquad$ $V_x = 2V_y$

Donde V_0 es la velocidad con que se lanza la piedra B.

Si sumamos las ecuaciones x e y, desaparece $\frac{1}{2} g t_c^2$ y nos queda $h = V_0 t_c \ \rightarrow \ t_c = \frac{h}{V_0}$,

De $V_x = 2V_y$ sacamos $g t_c = 2(V_0 - g t_c) \ \Rightarrow \ g \frac{h}{V_0} = 2\left(V_0 - g\frac{h}{V_0}\right) \rightarrow gh = 2V_0^2 - 2gh$

Seguimos simplificando y despejando,

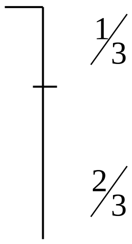
$$2V_0^2 = 3gh \ \rightarrow \ V_0 = \sqrt{\frac{3}{2} gh}$$

Por otro lado,

$$x = \frac{1}{2} g \cdot \frac{h^2}{V_0^2}$$

Vamos sustituyendo y simplificando para obtener la relación pedida en el enunciado:

$$\frac{h}{x} = \frac{h}{\left(\frac{1}{2} g \frac{h^2}{V_0^2}\right)} = \frac{2V_0^2 h}{gh^2} = \frac{2V_0^2}{gh} = \frac{2\left(\frac{3}{2} gh\right)}{gh} = 3$$



6.- Suponer que una partícula se mueve en línea recta, de tal modo que en cualquier tiempo t, su posición, velocidad y aceleración tienen el mismo valor numérico. Determinar la posición en función del tiempo.

Esto ha de cumplir,

a(t) = V(t) = r(t)

como $\mathrm{V(t)} = \frac{d\,r(t)}{dt}$ y $a(t) = \frac{d\,V(t)}{dt}$

Identificamos que la única función que coincide con sus derivadas es la exponencial e^x

Representado de forma general,

$$\left.\begin{aligned} a(t) &= X_0\, e^{(t-t_0)} \\ \mathrm{V(t)} &= \mathrm{X_0\, e^{(t-t_0)}} \\ r(t) &= X_0\, e^{(t-t_0)} \end{aligned}\right\}$$

Como puede observarse en la fórmula, la posición, aceleración y velocidad de la partícula dependerá de la posición inicial y de la diferencia entre tiempo final e inicial.

7.- Cierta partícula tiene una aceleración constante $\vec{a}$ = 6$\vec{\imath}$ + 4$\vec{\jmath}$ m/s². En el instante t = 0, la velocidad es cero y el vector de posición es $\vec{r}_0$ = 10$\vec{\imath}$ m:

a) Hallar los vectores posición y velocidad en un instante cualquiera t.

b) Hallar la ecuación de la trayectoria en el plano XY y hacer un esquema de la misma.

a)

$$\vec{v} = \int_{t0}^{t} \vec{a} \cdot dt = 6t\,\vec{\imath} + 4t\,\vec{\jmath} - 6t_0\,\vec{\imath} - 4t_0\,\vec{\jmath}$$

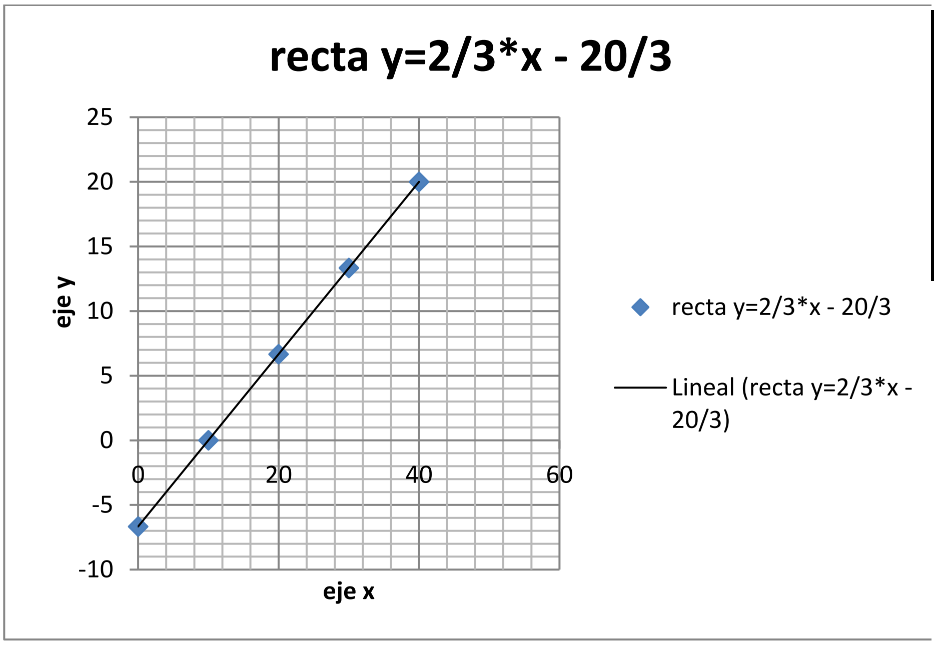
Pero en t = 0 nos dicen v = 0 $\Longrightarrow$ $t_0 = 0$ luego $\vec{v} = 6t\,\vec{\imath} + 4t\,\vec{\jmath}$

$$\vec{r} = \int_{t0}^{t} \vec{v} \cdot dt = 3t^2\,\vec{\imath} + 2t^2\,\vec{\jmath} - \underbrace{3t_o^2\,\vec{\imath} - 2t_0^2\vec{\jmath}}_{\overrightarrow{v0}}$$

Pero para t = 0 nos dicen $\overrightarrow{r_0}$ = 10 $\vec{\imath}$ luego:

$$\vec{r} = (10 + 3t^2)\,\vec{\imath} + 2t^2\,\vec{\jmath}\ \text{ m}$$

b) Por componentes tenemos
$$\begin{cases} x = 10 + 3t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{x-10}{3} \\ y = 2t^2 \Rightarrow y = 2 * \left(\frac{x-10}{3}\right) = \frac{2}{3}x - \frac{20}{3} \end{cases}$$



x	y
0	-6,666
10	0
20	6,666
30	13,333
40	20

8.-Una partícula se mueve en el plano XY con aceleración constante. Para t = 0, la partícula se encuentra en la posición x = 4 m, y = 3 m y posee la velocidad $\vec{v} = 2\vec{i} - 9\vec{j}$ m/s. La aceleración viene dada por el valor $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ m/s²:

a) Determinar el vector velocidad en el instante t =2 s.

b) Calcular el vector posición a t = 4 s. Expresar el módulo y la dirección del vector posición.

a)

Puesto que la aceleración es constante podemos hallar la velocidad *v*(t) integrando la aceleración, resultando:

$\vec{v}(t) = 4t\vec{i} + 3t\vec{j} + \overrightarrow{C_1}$, donde $\overrightarrow{C_1}$ es una constante de integración dada por las condiciones del problema.

Como para *t* = 0 nos dicen $\vec{v} = 2\vec{i} - 9\vec{j} \implies \overrightarrow{C_1} = 2\vec{i} - 9\vec{j}$.

Luego:

$\vec{v}(t) = 4t\vec{i} + 3t\vec{j} + 2\vec{i} - 9\vec{j} = (4t + 2)\vec{i} + (3t - 9)\vec{j}$

b) Al integrar nuevamente $\vec{r}(t) = (2t^2 + 2t)\vec{i} + \left(\frac{3}{2}t^2 - 9t\right)\vec{j} + \overrightarrow{C_2}$ y como nos dicen en el enunciado que para *t* = 0 tenemos la partícula en (4, 3).

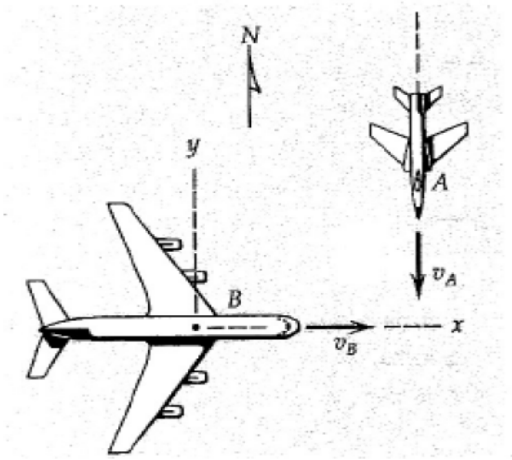
Entonces $\vec{r}_0(t) = 4\vec{i} + 3\vec{j} \implies \vec{r}(t) = (2t^2 + 2t + 4)\vec{i} + (\frac{3}{2}t^2 - 9t + 3)\vec{j}$

Para $t = 4 \implies \vec{r}(4) = 44\vec{i} - 9\vec{j}$ m

$|\vec{r}(4)| = \sqrt{44^2 + 9^2} = 44{,}9$

$\tan\alpha = -\frac{9}{44} \implies \alpha = -11{,}56°$

9.-El avión de pasajeros B vuela hacia el este con una velocidad v_B = 800 km/h. Un reactor militar que viaja hacia el sur con una velocidad v_A = 1200 km/h pasa por debajo de B volando un poco más bajo. ¿Qué velocidad les parece que lleva A a los pasajeros de B y cuál es la dirección de esa velocidad aparente?



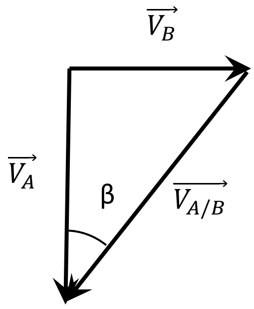
Utilizando la fórmula del movimiento relativo:

$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$

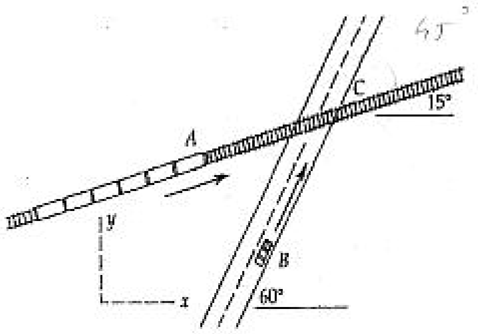
Despejando $V_{A/B}$:

$V_{A/B} = \sqrt{(1200)^2 + (800)^2} = 1442$ km/h

Entonces $\beta = tg^{-1}\left(\frac{800}{1200}\right) = 33{,}7°$



10.- El tren A viaja con una celeridad constante V_A= 120 km/h por la vía recta y plana. El conductor del automóvil B, previendo el paso a nivel C, disminuye la velocidad de 90 km/h de su vehículo a razón de 3 m/s^2. Hallar la velocidad y la aceleración del tren respecto al automóvil.



Hallamos la velocidad del tren respecto del automóvil ($\vec{V}_{A/B}$):

$$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B = 120(\cos 15\vec{\imath} + \text{sen}15\vec{\jmath}) - 90(\cos 60\vec{\imath} + \text{sen}60\vec{\jmath}) = 70{,}9\vec{\imath} - 46{,}9\vec{\jmath} \ \text{ km/h}$$

Hallamos la aceleración del tren respecto de automóvil ($\vec{a}_{A/B}$):

$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B = 0 - 3(-\cos 60\,\vec{\imath} - \text{sen}60\,\vec{\jmath}) = 1{,}5\,\vec{\imath} + 2{,}6\,\vec{\jmath} \ \text{ m/s}^2$$

(El signo menos se debe a que

es una desaceleración)

Por último para hallar la velocidad y la aceleración del tren respecto del automóvil, resolvemos los módulos de los vectores:

$$|\vec{V}_{A/B}| = \sqrt{(70{,}9\vec{\imath})^2 + (-46{,}9\vec{\jmath})^2} = 85 \text{ km/h}$$

$$|\vec{a}_{A/B}| = \sqrt{(1{,}5\vec{\imath}\,)^2 + (2{,}6\vec{\jmath}\,)^2} = 3 \text{ m/s}^2$$

-la velocidad del tren es **85 km/h**

-la aceleración del tren respecto del automóvil es **3 m/s^2**

11.- Una partícula se mueve a lo largo de la curva: $\vec{r}$ = $(t^2 - t)\vec{\imath}$ + $2t(7 - t)\,\vec{\jmath}$ + $(6t - t^3)\vec{k}$. Hallar los valores de las componentes tangencial y normal de su aceleración en el instante t = 2 s.

Hallamos la velocidad haciendo la derivada de $\vec{r}$ respecto del tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2t - 1)\vec{\imath} + (14 - 4t)\vec{\jmath} + (6 - 3t^2)\vec{k}$$

Para t = 2 s: $\vec{v}(2) = 3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 6\vec{k}$ $\qquad v = \sqrt{9 + 36 + 36} = 9$

Hallamos la aceleración haciendo la derivada de $\vec{v}$ respecto del tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 6t\vec{k}$$

Para t = 2 s $\qquad \vec{a}(2) = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 12\vec{k}$

Puesto que $\vec{v}$ = $v\,\vec{u}_t$ donde $\vec{u}_t$ es un vector tangente a la curva en t = 2 s:

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{3\vec{\imath}\ +\ 6\vec{\jmath}\ -\ 6\vec{\mathrm{k}}}{9} = \left[\frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\,\vec{\jmath}\ - \frac{2}{3}\,\vec{\mathrm{k}}\right]$$

Ahora, proyectando la aceleración total sobre la tangente de la curva obtendremos a_t:

$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{u}_t = \left(2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 12\vec{k}\right)\left[\frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath} - \frac{2}{3}\vec{k}\right] = 6$$

Luego:

$$\vec{a}_t = a_t \cdot \vec{u}_t = 6\left[\frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath} - \frac{2}{3}\vec{k}\right] = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 4\vec{k}$$

Teniendo todo esto ya podemos sacar $\vec{a}_n$ y posteriormente a_n:

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t = \left(2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 12\vec{k}\right) - \left(2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 4\vec{k}\right) = -8\vec{\jmath} - 8\vec{k}$$

$$a_n = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$$

12.- La ecuación del movimiento de una partícula que se desplaza por una circunferencia viene dada por $s = 1 - 3t + 2t^2$. Calcular la rapidez del móvil y su aceleración tangencial, normal y total en el instante t = 2 s, sabiendo que $a_n = 0.2\ \mathrm{m/s^2}$ para t = 1 s.

La rapidez del móvil es:

$$v = \frac{ds}{dt} = -3 + 4t$$

Para t = 1 s $\Rightarrow$ v = -3 + 4·1 = 1 m/s

Para t = 2 s $\Rightarrow$ v = -3 + 4·2 = 5 m/s

Calculamos la aceleración tangencial, haciendo la derivada de v respecto del tiempo:

$a_t = \frac{dv}{dt} = 4\ \mathrm{m/s^2}$ en cualquier instante.

Ahora calculamos la aceleración normal en t = 1 s, sabiendo que es un dato del problema:

$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{R} = 0.2\ \mathrm{m/s^2}$ donde el radio del círculo es: $R = \frac{1}{0,2} = 5$ m

Como R es constante, la aceleración normal en t =2 s es:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{25}{5} = 5\ \mathrm{m/s^2}$$

Teniendo todo esto, ya podemos sacar la aceleración total en t = 2 s:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = 6{,}4\ \mathrm{m/s^2}$$

13.- Una partícula se mueve sobre un circulo de radio r = 2 m de modo que $\boldsymbol{\theta = 3t^2 - 2t}$, donde $\boldsymbol{\theta}$ está dada en radianes y t en segundos. Después de 4 s de movimiento, calcular: el ángulo descrito, el arco recorrido, las velocidades lineal y angular, y las aceleraciones tangencial, centrípeta y angular.

La fórmula del movimiento circular es $s = r \cdot \theta$, ahora sustituimos en ella:

$$s = r \cdot \theta = r(3t^2 - 2t) = 6t^2 - 4t$$

Sustituimos *t* = 4 *s* para sacar los metros y los radianes después de 4 s:

$$\theta(4) = 3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 = 40 \text{ rad}$$

$$s(4) = 6 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 = 80 \text{ m}$$

Ahora podemos sacar las velocidades lineal y angular:

- la velocidad lineal la podemos sacar derivando *s* respecto del tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(6t^2 - 4t)}{dt} = 12t - 4$$

Ahora sacamos la velocidad lineal después de 4 segundos:

$$v(4) = 12 \cdot 4 - 4 = 44 \, \text{m/s}$$

- la velocidad angular la podemos sacar derivando θ respecto del tiempo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(3t^2 - 2t)}{dt} = 6t - 2$$

Ahora sacamos la velocidad angular después de 4 segundos:

$$\omega(4) = 6 \cdot 4 - 2 = 22 \, \text{m/s}$$

Cumpliéndose que $v = r \cdot \omega$ (44 = 2 · 22)

Podemos sacar las aceleraciones:

- la aceleración angular la podemos sacar derivando la velocidad angular respecto del tiempo:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(6t-2)}{dt} = 6 \ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}^2}$$ constante todo el tiempo

- la aceleración tangencial la podemos sacar derivando la velocidad lineal respecto del tiempo:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(12t-4)}{dt} = 12 \ {}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$$ constante todo el tiempo

- la aceleración centrípeta (o normal) la podemos sacar de la velocidad lineal al cuadrado entre el radio:

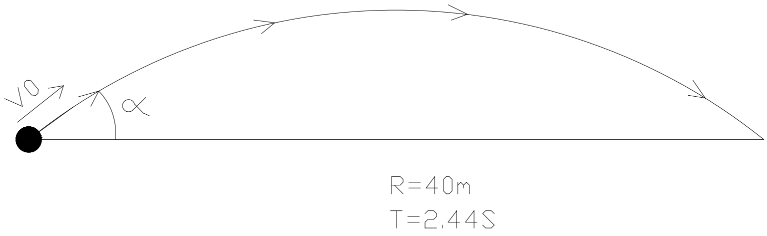
$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(12t - 4)^2}{r}$$

Después de 4 segundos:

$$a_c(4) = \frac{44^2}{2} = 968 \ \ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$$

La aceleración total es: $a = \sqrt{{a_t}^2 + \ {a_c}^2} = \sqrt{12^2 + 968^2} = 968{,}07 \ \ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$

14- Una bola lanzada al aire llega al suelo a una distancia de 40 m al cabo de 2.44 s. Determinar el módulo y la dirección de la velocidad inicial.



Este problema es un problema en el que una bola sale hacia delante y hacia arriba con una velocidad inicial en el eje *y* y otra velocidad inicial en el eje *x*.

Para resolverlo utilizaremos la fórmula del alcance y la del tiempo que está la bola en el aire.

Alcance → $R = \frac{Vo^2}{g} sen2 \propto$

Tiempo de vuelo → $T = \frac{2Vo}{g} sen \propto$ → $T^2 = \frac{4Vo^2}{g^2} sen^2 \propto$. Aquí hemos elevado al cuadrado los dos lados de la ecuación, para que en la siguiente fórmula nos sea más fácil de calcular.

En esta siguiente fórmula dividimos el alcance entre el tiempo de vuelo al cuadrado:

$$\frac{R}{T^2} = \frac{g}{4} * \frac{sen2 \propto}{sen^2 \propto} = \frac{g * 2 * sen \propto * \cos \propto}{4 * sen \propto * sen \propto} = \frac{g}{2} cotg \propto$$

Realizamos esta operación para averiguar el ángulo, el cual nos da la dirección de la bola:

$$cotg \propto = \frac{2 * R}{g * T^2} = \frac{2 * 40}{g * 2.44^2} = 1.369$$

$$\propto = 36.1$$

Una vez averiguado el ángulo podemos averiguar la velocidad inicial con que se lanza la bola:

$$vo = \frac{g * T}{2 * sen \propto} = 20.3 \text{ m/s}$$

15.- A la mitad de su altura máxima, la velocidad de un proyectil es ¾ de su velocidad inicial. ¿Qué ángulo forma el vector velocidad inicial con la horizontal?

A mitad de su altura máxima, utilizando la componente vertical de la velocidad, tenemos:

$$\frac{h}{2} = \underbrace{\sqrt{2gh}}_{Voy} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}gt^2 - \sqrt{2gh} \cdot t + \frac{h}{2} = 0$$

Despejamos el tiempo de la ecuación de 2º grado:

$$t = \frac{\sqrt{2gh} \pm \sqrt{2gh-hg}}{g} = \frac{\sqrt{2gh} \pm \sqrt{gh}}{g} = \frac{\sqrt{gh}}{g}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

(se ha tomado sólo el signo menos de la ec. de 2º grado ya que buscamos sólo el primer tiempo en que se alcanza *h*/2)

Este es el tiempo empleado en alcanzar $\frac{h}{2}$; en ese tiempo llevará una velocidad vertical dada por:

$$v_{0y} - gt = \sqrt{2gh} - gt = \sqrt{2gh} - g\frac{\sqrt{gh}\left(\sqrt{2}-1\right)}{g} = \sqrt{gh} = v_y$$

En este punto y según el enunciado:

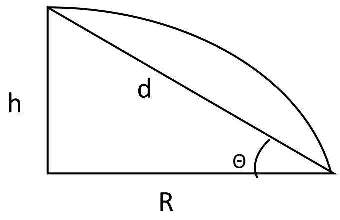
$$\frac{3}{4}v_0 = \sqrt{v_0^2\, cos^2\alpha + gh} \quad \text{pero} \quad gh = \frac{v_0^2\, sen^2\alpha}{2} = \frac{v_{0y}^2}{2}$$

ya que $v_0\, sen\alpha = \sqrt{2gh} = v_{oy}$ luego $\frac{3}{4}v_0 = \sqrt{v_0^2 cos^2\alpha + \frac{v_0^2 sen^2\alpha}{2}}$

y como $sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$ despejamos:

$cos\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \alpha = 69{,}29°$

16.- Una piedra se lanza horizontalmente desde lo alto de una cuesta que forma un ángulo θ con la horizontal. Si la velocidad de la piedra es v. ¿A qué distancia caerá sobre la cuesta?



Se ha de cumplir la fórmula $tan\theta = \frac{h}{R}$

$h = \frac{1}{2}gt^2 \;\rightarrow\; t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \;\rightarrow$ De esta ecuación sacamos el tiempo que tarda en caer la piedra

El alcance que tomará la piedra podemos deducirlo de la fórmula,

$$R = v \cdot t \;\rightarrow R = v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Por tanto podemos sustituir ahora en la fórmula principal e ir simplificando,

$$\frac{h}{R} = tan\theta \;\rightarrow\; \frac{h}{R} = \frac{h}{v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{h}{v\frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{g}}} = \frac{h\sqrt{g}}{v\sqrt{2h}} = \frac{\sqrt{h^2 g}}{\sqrt{2hv^2}}$$

$$tan\theta = \sqrt{\frac{gh^2}{2hv^2}} \rightarrow tan^2\theta = \frac{gh}{2v^2} \rightarrow h = \frac{tan^2\theta \cdot 2v^2}{g}$$

de donde

$$R = \frac{2v^2}{g} \cdot tan\theta$$

Con todo esto ya podemos hallar la distancia, utilizando la fórmula del teorema de Pitágoras,

$$d = \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{\left(\frac{2v^2}{g} \cdot tan^2\theta\right)^2 + \left(\frac{2v^2}{g}tan\theta\right)^2} = \sqrt{\frac{4v^4}{g^2} \cdot tan^4\theta + \frac{4v^4}{g^2}tan^2\theta}$$

Continuamos simplificando, recordando las propiedades trigonométricas y de raíces,

$$d = \left(\frac{2v^2}{g} \cdot tan\theta\right)\sqrt{1 + tan^2\theta} = \left(\frac{2v^2}{g} \cdot tan\theta\right)\sqrt{sec^2\theta} = \frac{2v^2}{g} \cdot tan\theta \cdot sec\theta = \frac{2v^2 \cdot tan\theta}{g \cdot cos\theta}$$